

RESOLUTION DE L'EQUATION DE LAPLACE PAR LA METHODE DES ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE

Hervé Lemonnier, DTP/SMTH, CEA/Grenoble, 38054 Grenoble cedex 9
Tél. : 04 38 78 45 40, Fax : 04 38 78 50 36, Mél. : *herve.lemonnier@cea.fr*

Version provisoire de 23 janvier 2004.

Table des matières

1	La méthode des éléments de frontière pour l'équation de Laplace	3
1.1	Problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace 2D	3
1.2	Problème mixte pour l'équation de Laplace 2D	8
1.3	Modélisation des impédances d'interface	9
1.4	Problèmes sur des domaines non simplement connexes	10
2	Programme de résolution de l'équation de Laplace 2D : L2D05	11
2.1	Constitution du jeu de données	11
2.1.1	Description du problème et de sa frontière	11
2.1.2	Description de chaque frontière	12
2.1.3	Description des conditions aux limites	12
2.1.4	Description des points intérieurs	13
2.2	Problème de Dirichlet à l'intérieur du cercle unité	13
2.3	Problème de Dirichlet à l'intérieur d'un carré	15
2.4	Problème mixte à l'intérieur du cercle unité	16
2.5	Problème mixte sur une espace annulaire	18
2.6	Problème à condition de Robin sur le cercle unité	18
2.7	Problème à deux milieux	19
3	Programme de résolution de l'équation de Laplace 3D avec symétrie de révolution : L3DAXI04	20
3.1	Constitution du jeu de données	21
3.1.1	Description du problème et de sa frontière	21
3.1.2	Description de chaque frontière	21
3.1.3	Description des conditions aux limites	22
3.1.4	Description des points intérieurs	22
3.2	Problème de Dirichlet à l'intérieur d'une sphère	23
3.3	Problème de Dirichlet sur l'intérieur d'un cylindre	25
4	Programme de résolution de l'équation de Laplace 3D : L3D02	27
4.1	Constitution du jeu de données	27
4.1.1	Description du problème et de sa frontière	27
4.1.2	Description des frontières	27
4.1.3	Description des conditions aux limites	28
4.1.4	Description des points intérieurs	28
4.2	Outils de visualisation de maillage: 3DPS03	28
4.3	Problème de Dirichlet sur l'intérieur d'une sphère	30
4.4	Problème mixte sur l'intérieur d'un cylindre	32
A	Solution du problème mixte de la sonde circulaire par la méthode des transformations conformes	37
A.1	Propriétés des fonctions elliptiques	37
A.2	Sonde circulaire	37
	Références	41

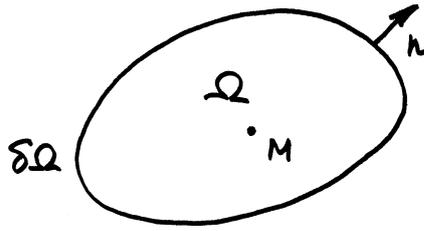


Figure 1 : Définition du domaine pour le problème de Dirichlet

1 La méthode des éléments de frontière pour l'équation de Laplace

La formulation intégrale d'un problème différentiel linéaire s'exprime très simplement dans le cas de l'équation de Laplace. On montre comment résoudre un problème de Dirichlet sur un domaine simplement connexe, puis comment les conditions aux limites mixtes sont prises en compte simplement. Ensuite, on montre comment résoudre plusieurs problèmes de Laplace dans des domaines emboîtés. Le problème servant d'exemple à la résolution de l'équation de Laplace est la simulation d'un densitomètre à impédance. La fonction de cet appareil est de déterminer la composition du milieu diphasique à partir de la mesure de son impédance électrique.

Dans un milieu électrique conducteur, les courants à basse fréquence sont régis par la loi d'Ohm,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1)$$

où \mathbf{j} est la densité de courant, σ est la conductivité électrique et \mathbf{E} est le champ électrique. Le bilan des charges électriques se traduit par,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2)$$

Le champ électrique dérivant du potentiel électrique V , ce dernier satisfait l'équation,

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = 0. \quad (3)$$

Lorsque la conductivité est uniforme cette équation se confond avec l'équation de Laplace. Dans un densitomètre à impédance, on excite le milieu diphasique en portant à un potentiel déterminé des électrodes affleurant la paroi (condition de Dirichlet). Sur les autres parties du dispositif les parois sont isolantes et la densité de courant normale est nulle (condition de Neumann). L'objet principal de la simulation du fonctionnement du densitomètre est de calculer le courant traversant le milieu diphasique. Il s'obtient par intégration de la densité de courant sur les électrodes.

1.1 Problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace 2D

Soit un domaine Ω , limité par la frontière $\partial\Omega$. Soit \mathbf{n} la normale extérieure au domaine et supposons, par souci de simplification que la frontière admette en tout point un plan tangent. Considérons le problème de Dirichlet pour le potentiel V et soit V_S le potentiel

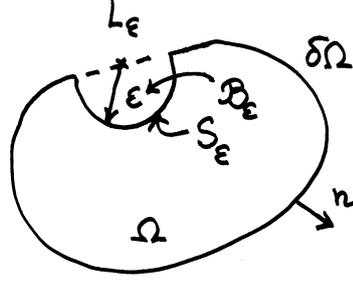


Figure 2 : Définition du domaine auxiliaire pour la démonstration de l'équation 13

donné sur la frontière $\partial\Omega$. Pour résoudre ce problème on introduit une fonction auxiliaire, G , une fonction de Green du laplacien, solution des équations suivantes,

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \text{ avec } G \rightarrow 0, \text{ quand } r \triangleq |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow 0, \quad (4)$$

où \mathbf{x}' est la position de la source. L'expression de G s'obtient simplement grâce au théorème de la divergence appliquée sur une boule $B(r)$ centrée sur l'origine et de rayon r . En considérant la symétrie de révolution du problème on a,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = G(r), \quad (5)$$

$$\int_{B(r)} \nabla \cdot \nabla G \, d\Omega = \int_{\partial B(r)} \nabla G \cdot \mathbf{n} \, dS = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si } \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases} \quad (6)$$

ce qui donne selon le nombre de dimension de l'espace considéré,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} \frac{\ln(r)}{2\pi} & \text{en 2D} \\ \frac{-1}{4\pi r} & \text{en 3D} \end{cases} \quad (7)$$

La fonction de Green permet d'obtenir la formulation intégrale du problème de Dirichlet par application de la formule de Green au potentiel recherché, V , et à la fonction de Green définie à l'équation 4. Compte tenu de la définition de G on a,

$$\int_{\Omega} (V \nabla^2 G - G \nabla^2 V) \, d\Omega' = \int_{\partial\Omega} V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} \, dS' - \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial V}{\partial n} \, dS' = \begin{cases} V(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \bar{\Omega} \end{cases} \quad (8)$$

où $\bar{\Omega}$ représente l'adhérence de l'ensemble Ω . Cette équation montre que le potentiel en tout point intérieur au domaine ne dépend que de la valeur de deux fonctions sur la frontière. La détermination complète de la fonction harmonique y est contenue. Cela démontre que les valeurs de la fonction à l'intérieur du domaine sont non essentielles. Lorsque la valeur de V et $\partial V / \partial n$ sont connues sur le contour, l'équation 8 permet de recalculer toutes les valeurs de V dans le domaine Ω .

Lorsque le point \mathbf{x} se situe exactement sur la frontière du domaine, on obtient une expression légèrement différente compte tenu que la première intégrale de surface, le potentiel de double couche, est discontinue au passage de la frontière. Une démonstration peut en être obtenue en considérant le domaine décrit à la figure 2 où Ω a été amputé d'une demie boule de rayon ϵ et de centre \mathbf{x} . L'équation 8 appliquée en un point \mathbf{x} qui est

maintenant extérieur au nouveau domaine donne,

$$0 = \int_{\Omega-B_\epsilon} (V\nabla^2 G - G\nabla^2 V) d\Omega' = \int_{\partial\Omega-L_\epsilon} V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} dS' - \int_{\partial\Omega-L_\epsilon} G(\mathbf{x},\mathbf{x}') \frac{\partial V}{\partial n} dS' + \int_{S_\epsilon} V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} dS' - \int_{S_\epsilon} G(\mathbf{x},\mathbf{x}') \frac{\partial V}{\partial n} dS',$$

où L_ϵ est la fraction de $\partial\Omega$ appartenant à B_ϵ et S_ϵ est la frontière de la demi boule B_ϵ intérieure au domaine Ω . On reconnaît immédiatement que si l'intégrale existe alors,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega-L_\epsilon} \left(V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} - G(\mathbf{x},\mathbf{x}') \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS' = \int_{\partial\Omega} \left(V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} - G(\mathbf{x},\mathbf{x}') \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS' \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (9)$$

De plus, en 2D, si on considère l'expression de la fonction de Green (7) on a,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} dS' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} V(\mathbf{x}') \int_{S_\epsilon} \frac{-1}{2\pi\epsilon} \epsilon d\theta = \frac{-V(\mathbf{x}')}{2}. \quad (10)$$

On notera que la démonstration en 3D est identique. Enfin si la densité de courant, j , est faiblement singulière, il existe K et α réels tels que,

$$|j(\epsilon)| < K\epsilon^{-\alpha}, \quad \alpha < 1, \quad (11)$$

ce qui conduit nécessairement à l'élimination de la dernière intégrale car,

$$\left| \int_{S_\epsilon} jG dS' \right| < \int_{S_\epsilon} \frac{K\epsilon^{-\alpha}}{2\pi} \ln \epsilon \epsilon d\theta = \frac{K\epsilon^{1-\alpha}}{2} \ln \epsilon. \quad (12)$$

On obtient alors la relation intégrale entre potentiel et flux qui résout le problème de Dirichlet,

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} dS' - \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{x}') \frac{\partial V}{\partial n} dS' = \frac{V(\mathbf{x}')}{2}.} \quad (13)$$

Cette relation fournit la relation explicite entre la distribution de potentiel sur le contour, l'*excitation électrique*, dans le cas du densitomètre à impédance et la densité de courant j , le *signal*, que l'on cherche à mesurer. C'est très précisément ce que l'on cherche à calculer dans notre problème. De même, dans un problème de conduction thermique, cette équation lie directement la *température* de paroi au *flux de chaleur*. On cherche en général à déterminer l'un connaissant l'autre et l'équation 13 en représente la solution sous forme implicite.

Pour un problème de Dirichlet, le potentiel est connu sur la surface et on doit résoudre l'équation intégrale suivante en j , le gradient normal du potentiel,

$$\int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{x}') j(\mathbf{x}') dS' = \int_{\partial\Omega} V_S(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} dS' - \frac{V_S(\mathbf{x}')}{2}, \quad x \in \partial\Omega, \quad (14)$$

où le second membre est connu. Cette équation de *Fredholm de première espèce* peut être résolue numériquement par une méthode de collocation après discrétisation. C'est l'essence même de la méthode des éléments de frontière.

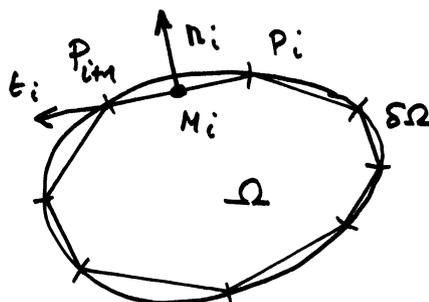


Figure 3 : Discrétisation du domaine. M_i est le point de collocation, P_i est la première extrémité du $i^{\text{ème}}$ élément. Le contour est orienté positivement dans le sens trigonométrique direct. La numérotation des points suit également ce sens.

La méthode de résolution de (13) la plus simple et la plus populaire consiste à découper la frontière en éléments linéaires pour un problème bidimensionnel ou en facettes planes à contour polygonal pour des problèmes 3D. Pour les problèmes 3D axisymétriques, on peut raisonner sur une méridienne. Par simplicité, illustrons la mise en oeuvre de la méthode sur un problème bidimensionnel.

En choisissant des éléments constants, c'est-à-dire, en supposant que sur chaque élément, le potentiel et sa dérivée normale sont uniformes, on obtient la version discrétisée de l'équation 13,

$$\frac{V(M_i)}{2} = \sum_j \left\{ V(M_j) \int_{P_j}^{P_{j+1}} \frac{\partial G}{\partial n}(M_i, M') dM' - J(M_j) \int_{P_j}^{P_{j+1}} G(M_i, M') dM' \right\}. \quad (15)$$

En simplifiant les notations, l'équation intégrale discrétisée (15) relie linéairement les valeurs discrètes du potentiel aux valeurs discrètes de la densité de courant par

$$\frac{1}{2} V_i = H_{ij} V_j + G_{ij} J_j, \quad (16)$$

où,

$$V_i = V(M_i) \quad \text{et} \quad J_i = \frac{\partial V}{\partial n}(M_i), \quad (17)$$

et les coefficients d'influence G et H sont définis par,

$$G_{ij} \triangleq \int_{P_j}^{P_{j+1}} G(M_i, P) dP, \quad (18)$$

$$H_{ij} \triangleq \int_{P_j}^{P_{j+1}} \nabla_P G(M_i, P) \cdot \mathbf{n}_j dP. \quad (19)$$

On trouvera une description détaillée de la mise en oeuvre des techniques de calcul des coefficients d'influence pour l'équation de Laplace dans les trois ouvrages cités en début de paragraphe. L'accent est mis également dans ces ouvrages sur les discrétisations d'ordre plus élevé de l'équation 13 où l'intégration doit nécessairement être exécutée numériquement.

Cependant, pour nombre de calculs pratiques, la discrétisation la plus élémentaire suffit et il ne faut pas négliger l'existence d'intégration analytique totale ou partielle des

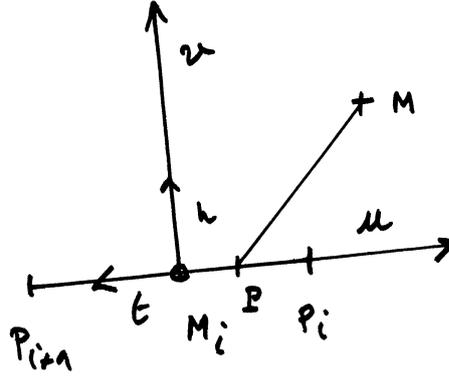


Figure 4: Définition de la base locale de l'élément. La tangente \mathbf{t} à l'élément est orientée par la numérotation des points. La normale est déduite de la tangente par rotation de $-\pi/2$. La normale étant extérieure au domaine, la numérotation des points définit le domaine de résolution.

coefficients d'influence. En particulier, en 3D, Hess & Smith (1967) et Ramachandran (1994) rappellent l'existence de ces solutions et les premiers auteurs proposent de plus une méthode de calcul de coefficients 3D axisymétriques de précision contrôlée. Outre l'amélioration de la précision, ces expressions simplifient le calcul des intégrales singulières ($i = j$). De plus, l'effort de calcul est allégé. Pour un problème plan, l'expression des coefficients G et H s'obtient simplement dans la base locale de l'élément (figure 4), centrée sur le milieu de l'élément, M_j , et dont les vecteurs de base sont colinéaires respectivement à \mathbf{t} et \mathbf{n} . En notant que l'élément est de longueur d et que dans la base de l'élément Δ_j , le point de collocation M_i a pour coordonnées,

$$\begin{aligned} x &= -\mathbf{M}_j \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{t}, \\ y &= \mathbf{M}_j \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (20)$$

On a alors simplement, en notant,

$$x_1 = x - \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = x + \frac{d}{2}, \quad (21)$$

$$G_{ij} = \frac{-1}{4\pi} \left[x_1 \ln(x_1^2 + y^2) - x_2 \ln(x_2^2 + y^2) + 2y \left(\tan^{-1} \frac{x_1}{y} - \tan^{-1} \frac{x_2}{y} \right) + 2d \right] \quad \text{pour } i \neq j, \quad (22)$$

$$G_{ii} = \frac{1}{4\pi} \left[d \ln \frac{d^2}{4} - 2d \right]. \quad (23)$$

Le calcul de H s'effectue aussi simplement et donne,

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{x_1}{y} - \tan^{-1} \frac{x_2}{y} \right]. \quad (24)$$

On remarque qu'on ne peut pas évaluer H sur la droite qui supporte l'élément Δ_j . Cette situation arrive fréquemment lorsque la frontière comporte une partie rectiligne. On peut pallier ce défaut en regroupant les deux arctangentes de (24),

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y(x_1 - x_2)}{x_1 x_2 + y^2}, \quad (25)$$

où l'on évalue l'arctangente en tenant compte des signes respectifs du numérateur et du dénominateur. La nouvelle expression n'est singulière que sur les extrémités des éléments. Cet inconvénient est également présent pour le calcul des coefficients tridimensionnels donné par exemple par Hess & Smith (1967).

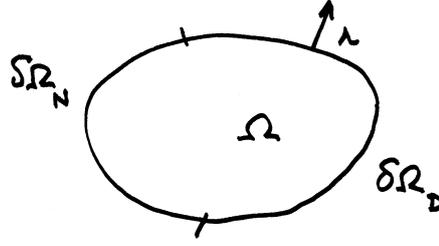


Figure 5 : Domaine de définition du problème mixte.

1.2 Problème mixte pour l'équation de Laplace 2D

Considérons un problème mixte de Laplace à résoudre sur le domaine décrit schématiquement à la figure 5. La frontière du domaine $\partial\Omega$ forme une partition $\partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$ où, sur chaque partie, sont imposées respectivement soit une condition de Neumann soit une condition de Dirichlet. Le problème se pose selon les termes suivants,

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 & x \in \Omega, \\ V &= V_S & x \in \Omega_D, \\ \frac{\partial V}{\partial n} &= j_S & x \in \Omega_N. \end{aligned} \quad (26)$$

On peut résoudre ce problème avec la même méthode que le problème de Dirichlet de la section 1.1. La formulation est identique à celle qui conduit à l'équation 13. La discrétisation de cette équation conduit, comme précédemment, à un problème analogue à l'équation 16. En introduisant les notations analogues à celles de Brebbia & Dominguez (1989), on peut écrire la relation entre les valeurs des flux et celles de la fonction aux frontières du domaine.

$$G_{ij} J_j = H'_{ij} V_j, \quad (27)$$

où on a défini,

$$H'_{ij} = H_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (28)$$

Sachant que sur chaque partie de la frontière une des deux valeurs seulement est connue, on peut, par une numérotation appropriée des éléments, réécrire (27) comme,

$$\begin{pmatrix} G_{DD} & G_{DN} \\ G_{ND} & G_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_D \\ J_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_{DD} & H'_{DN} \\ H'_{ND} & H'_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_D \\ V_N \end{pmatrix}. \quad (29)$$

En regroupant les inconnues et les données dans des vecteurs séparés on obtient la formulation discrétisée du problème mixte,

$$\begin{pmatrix} G_{DD} & -H'_{DN} \\ G_{ND} & -H'_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_D \\ V_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_{DD} & -G_{DN} \\ H'_{ND} & -G_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_D \\ J_N \end{pmatrix}. \quad (30)$$

La seule différence avec le problème de Dirichlet réside dans l'échange du rôle des inconnues et des données pour le partie de la frontière où sont imposées les conditions de Neumann.

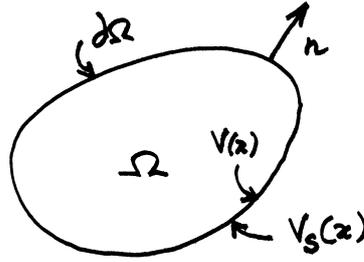


Figure 6 : Problème de Laplace avec un impédance d'interface.

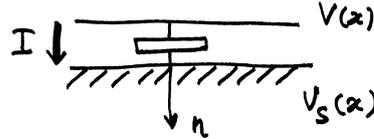


Figure 7 : Modélisation macroscopique de l'impédance d'interface.

1.3 Modélisation des impédances d'interface

La manifestation principale de l'impédance d'interface réside dans le fait que le potentiel imposé effectivement au milieu $V(\mathbf{x})$ est différent du potentiel porté par les électrodes $V_S(\mathbf{x})$. Ce phénomène, localisé au voisinage immédiat de l'interface entre l'électrode et le milieu, résulte de la dynamique des réactions de transfert de charge entre le métal des électrodes et les ions de la solution. On peut modéliser cet effet macroscopiquement par une impédance linéaire. Pour l'unité d'aire d'interface on aura,

$$V_S - V = ZI, \quad (31)$$

où Z est l'impédance d'interface et I le courant traversant l'unité d'aire d'électrode. Ce courant s'exprime en fonction du gradient normal du potentiel par,

$$I = \sigma S \frac{\partial V}{\partial n}, \quad (32)$$

où σ est la conductivité électrique du milieu et S , l'aire de la portion d'électrode considérée. On constate expérimentalement que l'impédance d'interface est de type parallèle et est donc une fonction décroissante de la surface de l'électrode. Ainsi on a,

$$ZS = \text{cste} = Z', \quad (33)$$

où l'impédance surfacique est constante et ne dépend essentiellement que de la fréquence du courant d'excitation. La condition aux limites, pour toute partie de la frontière portant des électrodes est donc,

$$V_S(\mathbf{x}) - V = \sigma Z' \frac{\partial V}{\partial n} \quad (34)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure au domaine. C'est une condition mixte qu'il est simple de prendre en compte par la méthode des éléments de frontière. En effet, en éliminant V dans la formulation intégrale (13) en utilisant la condition (34) et en discrétisant comme précédemment, on obtient,

$$G_{ij} J_j = H'_{ij} (V_{Sj} - \sigma_j Z'_{jj} J_j). \quad (35)$$

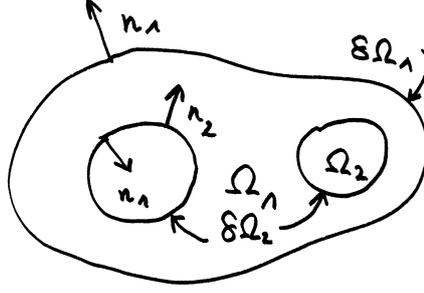


Figure 8 : Définition des domaines dans le cas d'un problème non simplement connexe.

Ce problème linéaire a le même degré de difficulté que les précédents. Il s'écrit,

$$G''_{ij} J_j = H''_{ij} V_{Sj}, \quad (36)$$

où l'on a simplement,

$$\begin{cases} G''_{ij} &= G'_{ij} + \sigma_j Z'_j H'_{ij}, \\ H''_{ij} &= H'_{ij}. \end{cases} \quad (37)$$

Il est remarquable de noter que cette technique se transpose directement aux conditions de flux convectif pour un problème de conduction. Ces dernières s'écrivent,

$$\Phi = h(T - T_{amb}) \quad (38)$$

où T_{amb} est la température du fluide de refroidissement, T est la température de surface et h est le coefficient d'échange thermique. Sachant que le flux conductif s'écrit d'après la loi de Fourier comme,

$$\phi = -k \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (39)$$

où k est la conductivité thermique. On obtient la condition mixte pour les problèmes de thermique analogue à la condition d'impédance d'interface,

$$T = T_{amb}(\mathbf{x}) - \frac{k}{h} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (40)$$

1.4 Problèmes sur des domaines non simplement connexes

Pour la simplicité de l'exposé, on se limitera au traitement d'un problème comprenant un ensemble de domaines Ω_2 inclus dans un domaine Ω_1 les englobant complètement. De plus on ne traitera que le problème de Dirichlet, toutes les variantes déjà exposées pouvant simplement et directement se transposer à ce problème. En notant bien que la normale à chaque domaine est toujours orientée vers l'extérieur du domaine considéré, l'application des relations intégrales (8) et (13) à chaque domaine donne,

$$\int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} V_1 \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \frac{\partial V_1}{\partial n_1} dS = \begin{cases} V_1 & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \frac{1}{2} V_1 & \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \\ 0 & \mathbf{x} \notin \bar{\Omega}_1 \end{cases} \quad (41)$$

$$\int_{\partial\Omega_2} V_2 \frac{\partial G}{\partial n_2} - G \frac{\partial V_2}{\partial n_2} dS = \begin{cases} V_2 & \mathbf{x} \in \Omega_2 \\ \frac{1}{2} V_2 & \mathbf{x} \in \partial\Omega_2 \\ 0 & \mathbf{x} \notin \bar{\Omega}_2 \end{cases} \quad (42)$$

On peut éliminer le potentiel des problèmes intérieurs si on utilise les conditions de continuité du potentiel et de la densité de courant aux interfaces ($\partial\Omega_2$) et en tenant compte de la condition aux limites de Dirichlet sur $\partial\Omega_1$. Elles s'énoncent,

$$V = V_S \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \quad (43)$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = V_2 \\ \sigma_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = 0 \end{array} \right\} \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_2 \quad (44)$$

En effectuant la combinaison linéaire des équations (41) multipliée par σ_1 et (42) multipliée par σ_2 , on obtient,

$$\int_{\partial\Omega_1} \left(V_1 \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \frac{\partial V_1}{\partial n_1} \right) dS + \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \int_{\partial\Omega_2} V_1 \frac{\partial G}{\partial n_1} dS = \begin{cases} \frac{1}{2} V_1 & x \in \partial\Omega_1 \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) V_1 & x \in \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (45)$$

Cette équation intégrale présente le même niveau de difficulté qu'un problème de Dirichlet sur le domaine Ω_1 . On remarque d'ailleurs que si les inclusions sont isolantes, (45) s'identifie directement avec le problème de Dirichlet (14).

2 Programme de résolution de l'équation de Laplace 2D : L2D05

Ce paragraphe décrit la constitution du jeu de données du programme L2D05. Puis il détaille la validation du code par une comparaison systématique avec des solutions analytiques de problèmes variés. La convergence en maillage sera étudiée sur un seul problème de Dirichlet. Les tendances seront néanmoins indiquées pour les autres problèmes.

Le jeu de données doit être placé dans un fichier (par défaut : L2D05.in) et les résultats du calcul sont édités dans un autre fichier (par défaut : L2D05.out). Les deux noms de fichiers peuvent être ajoutés à la ligne de commande appelant le programme. S'ils n'y sont pas, ils sont demandés à l'exécution du programme. Le jeu de données est conçu pour être facilement constitué à l'aide d'un tableur, par exemple, ou d'un autre programme de préparation des données. Il est très directement inspiré de la structure des jeux de données des programmes proposés par Brebbia & Dominguez (1989). La précision des calculs dépend du nombre de chiffres significatifs fournis dans le jeu de données. Le programme est codé en double précision et accepte environ 15 chiffres significatifs.

2.1 Constitution du jeu de données

Le jeu de données est constitué de quatre parties. Une première partie décrit le nombre et la nature des frontières, la seconde donne la liste des extrémités des éléments, la troisième détaille la nature des conditions aux limites sur chaque élément et la dernière, optionnelle, indique la liste des points intérieurs au domaine où la solution doit être calculée.

2.1.1 Description du problème et de sa frontière

- *Titre de la simulation* : une ligne tronquée à 80 caractères.

- *Symétries du problème* : deux entiers NSX et NSY . S'il n'y a pas de symétries dans le problème, les deux entiers sont nuls. Si le domaine et les conditions aux limites sont identiques lorsque l'on change x en $-x$, alors $NSX = 1$. Si le domaine est invariant en changeant x en $-x$ et que les conditions aux limites sont égales en valeur absolue mais opposées, alors $NSX = -1$. NSY joue le même rôle lorsque l'on change y en $-y$.
- *Nombre d'éléments total* toutes frontières confondues, N . Ce nombre est limité à 1024.
- *Nombre de points intérieurs* où doit être calculée la solution, L , après résolution de l'équation intégrale.
- Nombre de frontières constituant le domaine, M .
- *Liste des numéros des noeuds* terminant chaque frontière individuelle. S'il y a M frontières il doit y avoir M valeurs. Le nombre de frontières est limité à 21.

2.1.2 Description de chaque frontière

- *Liste des noeuds* $X(I)$, $Y(I)$, de toutes les frontières. Chaque frontière ouverte ou fermée de n éléments doit comporter $n+1$ noeuds même, si dans le cas d'une frontière fermée, le premier noeud est identique au dernier. Un problème à N éléments et M frontières doit comporter $M+N$ noeuds.
- Dans le cas d'un problème comportant des symétries, il est inutile de fournir tous les noeuds de la frontière. La partie de la frontière à $x > 0$ et/ou $y > 0$ est suffisante. Les noeuds manquants sont automatiquement calculés.
- La numérotation des noeuds oriente la tangente au contour ainsi que sa normale. La normale est déduite de la tangente par rotation de $-\pi/2$ de la tangente. Pour un domaine fermé, la numérotation dans le sens trigonométrique direct des noeuds oriente la normale au contour, calculée dans le code, vers l'extérieur du domaine. Le domaine de résolution est alors l'intérieur de la courbe. Une numérotation en ordre inverse indique que le domaine est à l'extérieur de la courbe. Dans le cas d'un domaine multiplement connexe, la numérotation doit respecter cette contrainte. Ainsi un domaine comportant un "trou" est constitué de deux frontières. La frontière extérieure sera numérotée dans le sens trigonométrique direct tandis que la frontière intérieure devra être numérotée selon le sens trigonométrique rétrograde. Dans ces conditions, la normale est toujours orientée vers l'extérieur du domaine.

2.1.3 Description des conditions aux limites

La numérotation des éléments est imposée par la liste des noeuds. Chaque élément doit être décrit par un entier donnant le type de la condition aux limites suivi d'une ou deux valeurs réelles selon le type de condition. Il ne doit y avoir qu'une description d'élément par ligne.

- $KODE(I) \leq 0$: Conditions aux limites de Dirichlet. La condition ordinaire de Diri-

chlet est $KODE(I) = 0$ suivi d'un nombre donnant la valeur du potentiel imposé au centre de l'élément. Une variante, $KODE(I) < 0$, permet d'individualiser une partie de la frontière sur laquelle est calculée, après résolution, l'intensité I , par sommation des valeurs des flux des éléments comportant la même marque.

- $KODE(I) = 1$: Conditions aux limites de Neumann. L'indicateur de la condition de Neumann doit être suivi de la valeur imposée de la dérivée normale de l'inconnue au centre de l'élément.
- $KODE(I) = 2$: Conditions aux limites mixtes ou de Robin. Cette condition s'écrit,

$$V + z \frac{\partial V}{\partial n} = f_S \quad (46)$$

où V est la fonction inconnue, z et f_S sont deux fonctions connues prenant leurs valeurs sur la frontière. Après l'indicateur de condition de Robin, $KODE(I) = 2$, la ligne décrivant la condition aux limites doit comporter la valeur de f_S suivie de celle de z .

- $KODE(I) = 3$: Conditions de continuité entre deux domaines de propriétés différentes. Cette condition ne peut être appliquée que sur une frontière intérieure entièrement entourée par le domaine principal de résolution. Elle ne peut être utilisée que sur une inclusion intérieure au domaine principal. L'indicateur de condition de continuité, $KODE(I) = 3$, doit être suivi du rapport de la conductivité de l'inclusion à celle du domaine principal, σ_{inc}/σ . Si le domaine possède plusieurs inclusions, les valeurs de la conductivité de chaque inclusion peuvent être différentes.

2.1.4 Description des points intérieurs

Si au début du jeu de données, le nombre de points intérieurs, L , où il faut évaluer la solution est non nul, La dernière section du jeu de données contient la liste des points où cette solution doit être évaluée. Cette évaluation est effectuée après résolution de l'équation intégrale.

- *Liste des points intérieurs* $PX(I)$, $PY(I)$, coordonnées des points intérieurs. Il doit y avoir au moins L couples de coordonnées.

2.2 Problème de Dirichlet à l'intérieur du cercle unité

L'équation de Laplace est séparable en coordonnées cylindriques et possède de nombreuses solutions analytiques sur cette géométrie (Morse & Feshbach, 1953). Parmi celles-ci on a sélectionné la suivante,

$$V_S(r, \theta) = r^n \cos(n\theta), \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (47)$$

où r et θ sont respectivement la distance à l'origine et l'angle du rayon vecteur avec l'axe des x . Si on impose comme condition de Dirichlet sur le cercle unité,

$$V = V_S(1, \theta) = \cos(n\theta), \quad (48)$$

on doit trouver,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V_S}{\partial r} \Big|_{r=1} = n \cos(n\theta). \quad (49)$$

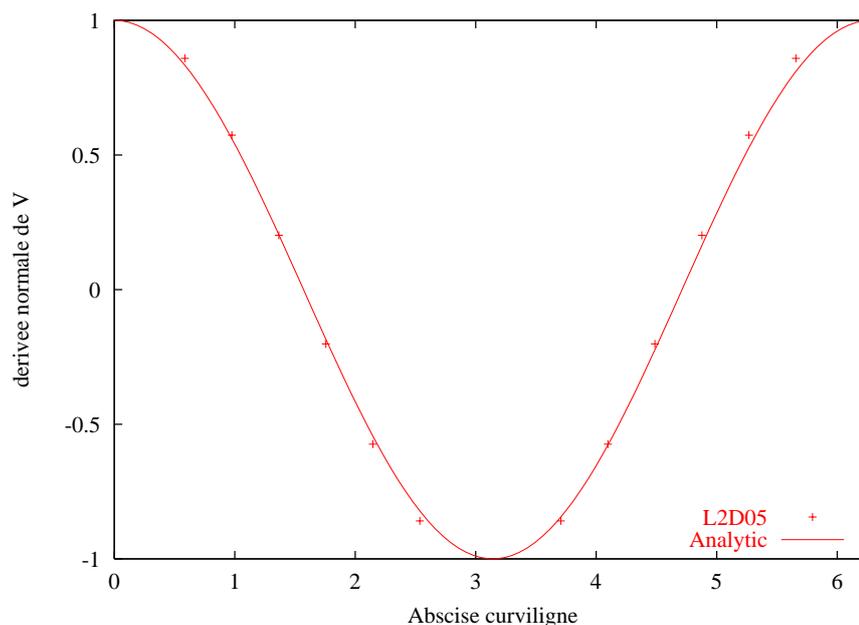


Figure 9 : Comparaison entre la solution numérique (L2D05) du problème de Dirichlet (48), pour $n = 1$ sur un cercle comportant 16 éléments égaux. Jeu de données : Test2D01.for, Graphe : Test2D01.plt.

Nombre d'éléments	max $\left \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n_a} \right , n = 1$	max $\left \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n_a} \right , n = 2$
8	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$
16	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$
32	$8,0 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$
64	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$
128	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$
256	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$5,5 \cdot 10^{-4}$
512	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$
1024	$8,0 \cdot 10^{-6}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$

Tableau 1 : Etude de la convergence en maillage du problème de Dirichlet (48) pour deux valeurs de n . L'indice a se réfère aux valeurs analytiques.

La figure 9 montre une comparaison entre la solution analytique et de la solution numérique pour un domaine comportant seulement 16 éléments. L'accord est remarquable.

Les résultats de l'étude de convergence en maillage sont consignés au tableau 1 pour deux problèmes de même type (48). Pour chaque simulation, on a calculé le maximum de l'écart entre la solution numérique et la solution analytique (49). On observe bien que la norme de l'erreur, ainsi définie, décroît comme le carré du nombre de noeuds, pour les grandes valeurs du nombre de noeuds. Lorsque l'on double le nombre de noeuds, la norme de l'erreur est divisée par 4. La méthode de collocation utilisée avec des éléments constants fournit donc une approximation du second ordre de la solution lorsque cette dernière et sa dérivée sont bornées.

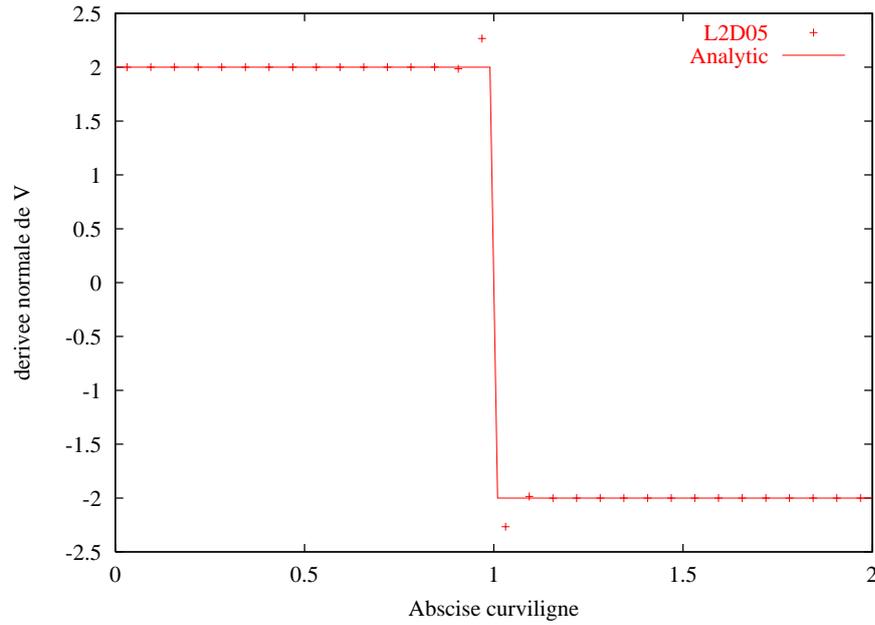


Figure 10: Comparaison entre la solution numérique (L2D05) du problème de Dirichlet (50), quart de carré de côté unité comportant 16 éléments. Les conditions de symétries ont été utilisées sur chaque axe, la solution et le domaine étant symétrique par rapport aux deux axes. L'abscisse curviligne est comptée positivement dans le sens trigonométrique. Jeu de données : Test2D09.for, Graphe : Test2D09.plt.

2.3 Problème de Dirichlet à l'intérieur d'un carré

Lorsque le domaine comporte un angle, la solution ne converge pas en maillage au voisinage du coin. C'est ce que montre la figure 10 où l'on a représenté la solution du problème de Dirichlet sur un carré pour la même fonction que précédemment (47). Si on sélectionne $n = 2$, la solution du problème de Dirichlet possède les conditions aux limites suivantes.

$$V_S = r^2 \cos(2\theta) = x^2 - y^2 \quad (50)$$

La solution du problème de Dirichlet s'obtient par dérivation,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \begin{cases} \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=1} = 2, & \text{sur } x = 1 \\ \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=1} = -2, & \text{sur } y = 1 \end{cases} \quad (51)$$

Le défaut de la solution ne régresse ni lorsque l'on augmente le nombre de noeuds, ni en raffinant le maillage au voisinage du coin. Le défaut reste localisé sur les deux derniers éléments et garde une amplitude constante. Toutefois, la solution converge correctement en maillage en dehors du voisinage de la singularité géométrique et surtout, le flux sur chaque côté du carré converge rapidement comme le montre le tableau 2. Le flux est calculé sur un seul côté du carré, le flux total étant nul par construction, le défaut de flux sur l'autre côté est opposé à celui du premier. Le flux analytique est donné par,

$$I_{a,x=1} = \int_0^1 \frac{\partial V_S}{\partial y} dy = 2 \quad (52)$$

Nombre d'éléments	max	$\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n_a}$	$\Delta I_{x=1}$
4		$2,3 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$
8		$2,5 \cdot 10^{-1}$	$5,7 \cdot 10^{-2}$
16		$2,6 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$
32		$2,8 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$
64		$2,8 \cdot 10^{-1}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$
128		$2,8 \cdot 10^{-1}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$
256		$2,8 \cdot 10^{-1}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$
512		$2,8 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$
1024		$2,8 \cdot 10^{-1}$	$5,2 \cdot 10^{-4}$

Tableau 2 : Etude de la convergence en maillage du problème de Dirichlet (50) sur un carré. L'indice a se réfère aux valeurs analytiques.

La convergence du flux n'est que du premier ordre, dans ce cas, comme le montre le tableau 2. En doublant le nombre de noeuds, l'erreur sur le flux est divisée par deux. La solution est toutefois de bien meilleure qualité en dehors de cette zone.

Canot (1989) a analysé l'origine de ce problème de singularité. Il propose de modifier légèrement la position du point de collocation sur les éléments de coin afin de prendre en compte la variation forte de V et $\partial V/\partial n$ sur la frontière. La solution étant de bonne qualité en dehors du voisinage immédiat du coin, cette correction n'a pas été mise en oeuvre.

2.4 Problème mixte à l'intérieur du cercle unité

Le problème que l'on propose d'analyser maintenant correspond au problème électrique suivant. On place deux électrodes circulaires d'angle au centre $2\theta_0$ sur une conduite circulaire isolante. On excite le milieu conducteur en potentiel par les électrodes et on cherche le courant traversant le milieu. Ce problème possède une solution analytique (AnnexeA). Il se formule de la façon suivante,

$$\begin{cases} V = 1 & -\theta_0 < \theta < \theta_0 \\ V = -1 & \pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0 \\ \frac{\partial V}{\partial n} = 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (53)$$

Le courant collecté sur les électrodes, pour le demi cercle $y > 0$, peut être obtenu par la méthode des transformations conformes et analytiques (Lemonnier *et al.*, 1991). On obtient,

$$I = \frac{K(\cos \theta_0)}{K(\sin \theta_0)} \quad (54)$$

où K est l'intégrale elliptique complète de première espèce. Elle se calcule par exemple par un développement en k , son module, par la formule xxx d' Abramovitch & Stegun (1965). On peut également la calculer par d'autres méthodes détaillées à l'annexe A qui, de plus, donne le calcul complet de la solution analytique du problème mixte sur l'intérieur d'un cercle (53).

Le tableau 3 montre que la convergence du courant en maillage est à peu près du premier ordre en h , la taille des éléments. La solution ne converge pas en maillage pour la densité de courant au voisinage de l'extrémité de l'électrode (figure 11) pour la même

Nombre d'éléments	ΔI maillage régulier	ΔI maillage affiné
2	$3,0 \cdot 10^{-2}$	
4	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$
8	$2,4 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$
16	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$
32	$7,2 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$
64	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$7,7 \cdot 10^{-5}$
128	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$
256	$9,7 \cdot 10^{-4}$	$4,9 \cdot 10^{-6}$
512	$4,9 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$
1024	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$8,6 \cdot 10^{-8}$

Tableau 3 : Etude de la convergence en maillage du problème mixte (53) sur le cercle unité avec $\theta_0 = 45^\circ$. L'indice a se réfère aux valeurs analytiques.

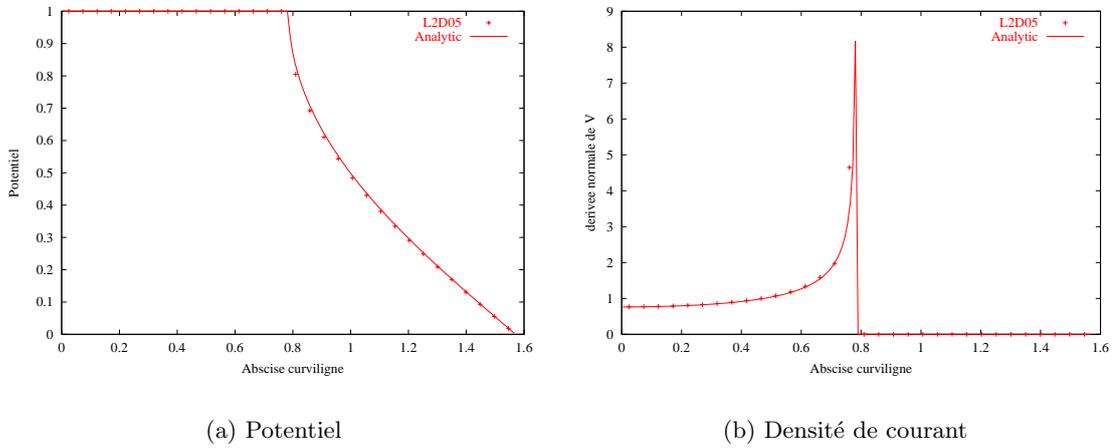


Figure 11 : Comparaison entre la solution analytique et le résultat numérique pour le problème mixte à l'intérieur d'un cercle avec $\theta_0 = 45^\circ$ (53). Calcul avec 16 éléments sur un quart de cercle. Jeu de données : Test2D10.for. Calcul analytique : Tournaire.for, graphique : Tournaire.plt

raison que pour le problème de Dirichlet sur un carré. Toutefois, la valeur du courant est exacte. La convergence du courant peut être accélérée en raffinant le maillage au voisinage du bord de l'électrode. La densité de courant y est toujours fautive, toutefois sa contribution dans le courant est plus réduite.

Une méthode simple pour obtenir des maillages affinés consiste à utiliser une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$ comme celle-ci,

$$f(u) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi u}{2}\right) & \text{pour resserrer en } u = 1 \\ 1 - \cos\left(\frac{\pi u}{2}\right) & \text{pour resserrer en } u = 0 \end{cases} \quad (55)$$

Le tableau 3 montre que le courant converge beaucoup plus vite vers la valeur analytique en utilisant un maillage raffiné près du bord des électrodes. Cette méthode permet d'obtenir une valeur précise sans mettre en oeuvre la méthode préconisée par Canot (1989). C'est la raison pour laquelle nous avons conservé des éléments constants pour tous les problèmes.

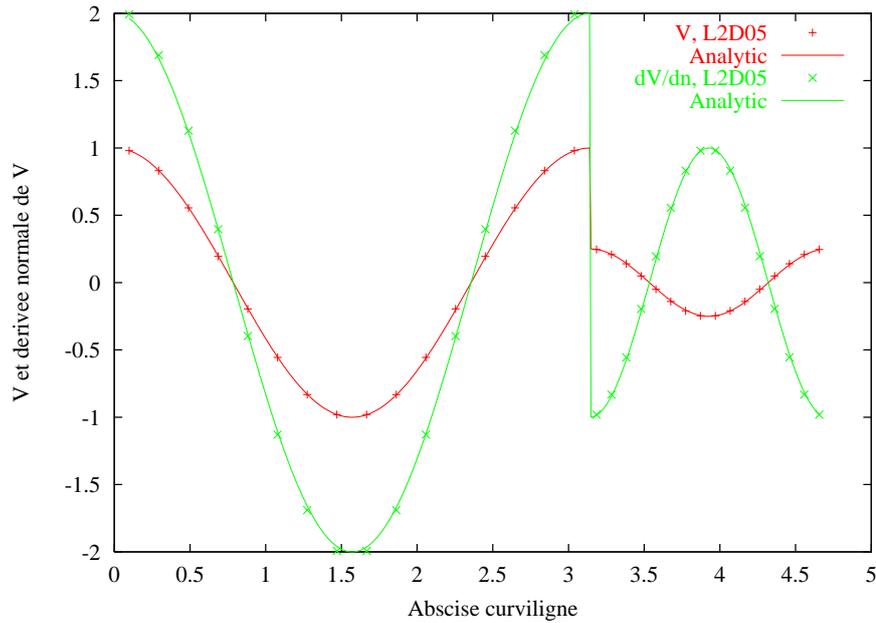


Figure 12 : Comparaison de la solution analytique et de la solution numérique du problème mixte (58) sur un anneau, $.5 \leq r \leq 1$, $n = 2$. Le problème est pair, seule la partie $y \geq 0$ a été maillée. 16 éléments de taille égale sur la frontière extérieure et 16 éléments identiques sur la frontière intérieure. L'abscisse curviligne est cumulée sur les deux frontières. $s \leq \pi$ correspond à la frontières extérieure, $\pi \leq s \leq 3\pi/2$ correspond à la frontière intérieure. Jeu de données Test2D11.for, graphe : Test2D11.plt

2.5 Problème mixte sur une espace annulaire

Un autre problème mixte simple sur un espace annulaire peut encore servir de cas test. L'espace annulaire est défini, en coordonnées polaires par,

$$a \leq r \leq 1 \quad (56)$$

Le problème mixte proposé a toujours comme solution (49). Les conditions aux limites que l'on propose sont les suivantes,

$$\begin{cases} V = \cos n\theta, & r = 1 \\ \frac{\partial V}{\partial n} = -na^{n-1} \cos n\theta, & r = a \end{cases} \quad (57)$$

Ce problème admet donc comme solution,

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial n} = n \cos n\theta, & r = 1 \\ V = a^n \cos n\theta, & r = a \end{cases} \quad (58)$$

La figure 12 montre que le problème est correctement résolu par la méthode numérique.

2.6 Problème à condition de Robin sur le cercle unité

Le cas test suivant proposé est un problème mixte sur l'intérieur du cercle unité. Si l'on impose une condition de Robin de la forme

$$V + z \frac{\partial V}{\partial n} = V_S, \quad (59)$$

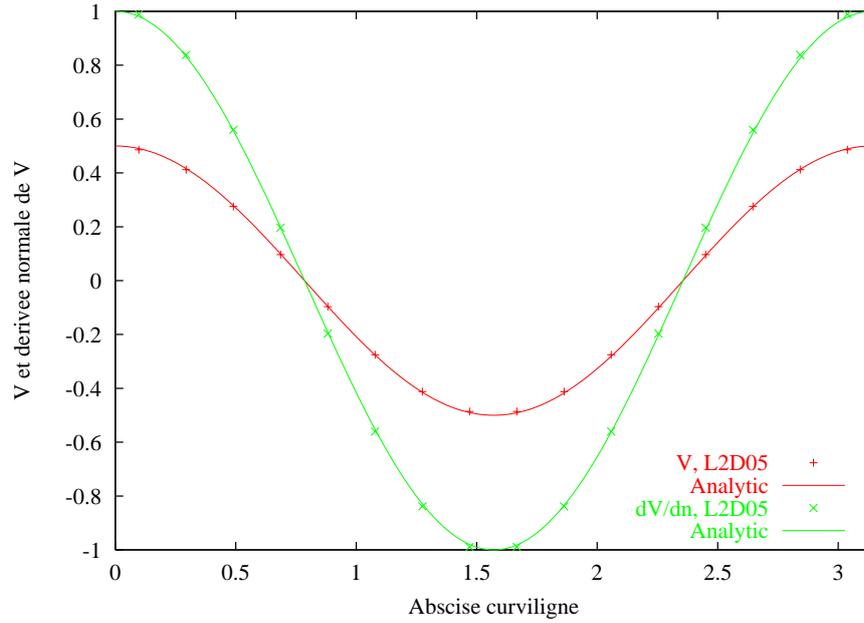


Figure 13 : Comparaison de la solution analytique et de la solution numérique du problème de Robin (62) avec $n = 2$, $z = 0,5$, sur l'intérieur du cercle. Le problème est pair, seule la partie $y \geq 0$ a été maillée. 16 éléments de taille égale sur la frontière. Jeu de données Test2D12.for, graphe: Test2D12.plt

où z est une constante et V_S est toujours la fonction harmonique (49), alors, le potentiel a nécessairement la forme,

$$V = A \cos n\theta, \quad (60)$$

où la valeur de la constante, A , est déterminée par la condition aux limites (59). On obtient,

$$A = \frac{1}{1 + nz}. \quad (61)$$

La solution du problème mixte est donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{\cos n\theta}{1 + nz}, \\ \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{n \cos n\theta}{1 + nz}. \end{array} \right. \quad (62)$$

La figure 13 montre que le problème est bien résolu par la méthode numérique.

2.7 Problème à deux milieux

Le problème traité dans ce paragraphe comporte deux milieux. Le domaine principal est compris dans le cercle unité. On y a placé une inclusion de rayon a de conductivité différente. Le rapport de la conductivité de l'inclusion à celle du milieu principale est σ . On impose une condition de Dirichlet sur la frontière extérieure du cercle unité et sur la frontière intérieure, on impose la continuité du potentiel et de la densité de courant.

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = \cos n\theta \quad r = 1 \\ V_2 = V_1 \\ \frac{\partial V_1}{\partial n} = \sigma \frac{\partial V_2}{\partial n} \end{array} \right\} r = a \quad (63)$$

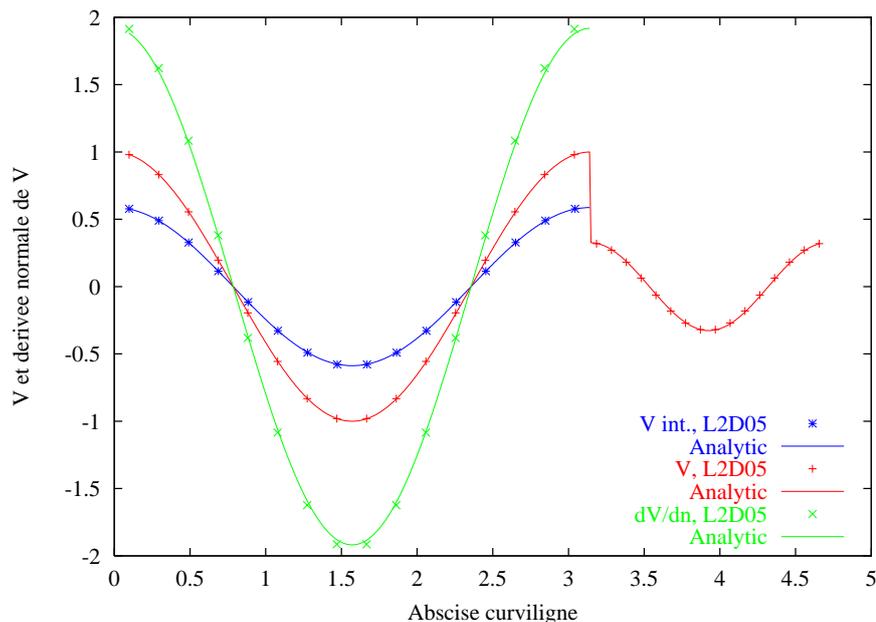


Figure 14: Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique du problème avec une inclusion (63). $n = 2$, $a = 0,5$ et $\sigma = 0,5$. Les points intérieurs, symboles bleus, sont placés sur un cercle de rayon $r = 0,75$. 16 éléments identiques sur le demi cercle $r = 1$, 16 éléments identiques sur le cercle intérieur $r = a$. Jeu de données : Test2D13.for, graphe : Test2D13.plt.

où l'indice 1 se rapporte au milieu principal (espace annulaire $a \leq r \leq 1$) et l'indice 2 se rapporte à l'inclusion ($r \leq a$). La solution du problème par séparation des variables donne,

$$\begin{aligned} V_1 &= Ar^n \cos n\theta + Br^{-n} \cos n\theta, & a \leq r \leq 1 \\ V_2 &= Cr^n \cos n\theta, & r \leq a \end{aligned} \quad (64)$$

avec,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 + \sigma}{(1 + \sigma) + (1 - \sigma)a^{2n}} \\ B &= \frac{(1 - \sigma)a^{2n}}{(1 + \sigma) + (1 - \sigma)a^{2n}} \\ C &= \frac{2}{(1 + \sigma) + (1 - \sigma)a^{2n}} \end{aligned} \quad (65)$$

La figure 14 montre que la méthode numérique décrit de façon satisfaisante la solution du problème posé.

3 Programme de résolution de l'équation de Laplace 3D avec symétrie de révolution : L3DAXI04

Ce paragraphe décrit la constitution du jeu de données du programme L3DAXI04. Puis il détaille la validation du code par une comparaison avec des solutions analytiques de problèmes variés. La convergence en maillage sera étudiée sur un seul problème de Dirichlet. Les tendances seront néanmoins indiquées pour les autres problèmes.

Le jeu de données doit être placé dans un fichier (par défaut : L3DAXI04.in) et les résultats du calcul sont édités dans un autre fichier (par défaut : L3DAXI04.out). Les deux noms de fichiers peuvent être ajoutés à la ligne de commande appelant le programme. S'ils n'y sont pas, ils sont demandés à l'exécution du programme. Le jeu de données est conçu pour être facilement constitué à l'aide d'un tableur, par exemple, ou d'un autre programme de préparation des données. Il est pratiquement identique au jeu de données du solver 2D puisque l'équation intégrale à résoudre est de dimension 1. La précision des calculs dépend du nombre de chiffres significatifs fournis dans le jeu de données. Le programme est codé en double précision et accepte environ 15 chiffres significatifs.

3.1 Constitution du jeu de données

Le jeu de données est constitué de quatre parties. Une première partie décrit le nombre et la nature des frontières, la seconde donne la liste des extrémités des éléments, la troisième détaille la nature des conditions aux limites sur chaque élément et la dernière, optionnelle, indique la liste des points intérieurs au domaine où la solution doit être calculée.

3.1.1 Description du problème et de sa frontière

- *Titre de la simulation* : une ligne tronquée à 80 caractères.
- *Symétries du problème* : un seul entier NSX . Il n'y a ici qu'une seule possibilité de symétrie en raison de la symétrie de révolution. S'il n'y a pas de symétries dans le problème, l'entier NSX est nul. x se réfère à la coordonnée selon l'axe de révolution tandis que y se réfère à la direction radiale, orthogonale à l'axe de révolution. Si le domaine et les conditions aux limites sont identiques lorsque l'on change x en $-x$, alors $NSX = 1$. Si le domaine est invariant en changeant x en $-x$ et que les conditions aux limites sont égales en valeur absolue mais opposées, alors $NSX = -1$.
- *Nombre d'éléments total* toutes frontières confondues, N . Ce nombre est limité à 2050.
- *Nombre de points intérieurs* où doit être calculée la solution, L , après résolution de l'équation intégrale.
- Nombre de frontières constituant le domaine, M .
- *Liste des numéros des noeuds* terminant chaque frontière individuelle. S'il y a M frontières il doit y avoir M valeurs. Le nombre de frontières est limité à 21.

3.1.2 Description de chaque frontière

- *Liste des noeuds* $X(I)$, $Y(I)$, de toutes les frontières. Chaque frontière ouverte ou fermée de n éléments doit comporter $n + 1$ noeuds même, si dans le cas d'une frontière fermée, le premier noeud est identique au dernier. Un problème à N éléments et M frontières doit comporter $M + N$ noeuds. Seule la méridienne du domaine est concernée. Si la frontière coupe l'axe de révolution, on ne donne qu'une demi méridienne ($y > 0$). L'autre partie est inutile et ne doit pas être indiquée.

- Dans le cas d'un problème comportant des symétries, il est inutile de fournir tous les noeuds de la frontière. La partie de la frontière à $x > 0$ est suffisante. Les noeuds manquants sont automatiquement calculés.
- La numérotation des noeuds oriente la tangente au contour ainsi que sa normale. La normale est déduite de la tangente par rotation de $-\pi/2$ de la tangente. Pour bien comprendre cette convention, on considère que l'axe des x est l'axe des abscisses et que l'axe des y est l'axe des ordonnées et qu'ils forment un repère direct. La numérotation dans le sens trigonométrique direct des noeuds oriente la normale au contour, calculée dans le code, vers l'extérieur du domaine. Le domaine de résolution est alors l'intérieur de la courbe. Une numérotation en ordre inverse indique que le domaine est à l'extérieur de la courbe. Dans le cas d'un domaine multiplement connexe, la numérotation doit respecter cette contrainte. Ainsi un domaine comportant un "trou" est constitué de deux frontières. La frontière extérieure sera numérotée dans le sens trigonométrique direct tandis que la frontière intérieure devra être numérotée selon le sens trigonométrique rétrograde. Dans ces conditions, la normale est toujours orientée vers l'extérieur du domaine.

3.1.3 Description des conditions aux limites

La numérotation des éléments est imposée par la liste des noeuds. Chaque élément doit être décrit par un entier donnant le type de la condition aux limites suivi d'une ou deux valeurs réelles selon le type de condition. Il ne doit y avoir qu'une description d'élément par ligne.

- $KODE(I) \leq 0$: Conditions aux limites de Dirichlet. La condition ordinaire de Dirichlet est $KODE(I) = 0$ suivi d'un nombre donnant la valeur du potentiel imposé au centre de l'élément. Une variante, $KODE(I) < 0$, permet d'individualiser une partie de la frontière sur laquelle est calculée, après résolution, l'intensité I , par sommation des valeurs des flux des éléments comportant la même marque (densité de flux multipliée par l'aire de l'élément et non pas la longueur de l'élément sur la méridienne).
- $KODE(I) = 1$: Conditions aux limites de Neumann. L'indicateur de la condition de Neumann doit être suivi de la valeur imposée de la dérivée normale de l'inconnue au centre de l'élément.
- $KODE(I) = 2$: Conditions aux limites mixtes ou de Robin. Cette condition s'écrit,

$$V + z \frac{\partial V}{\partial n} = f_S \quad (66)$$

où V est la fonction inconnue, z et f_S sont deux fonctions connues prenant leurs valeurs sur la frontière. Après l'indicateur de condition de Robin, $KODE(I) = 2$, la ligne décrivant la condition aux limites doit comporter la valeur de f_S suivie de celle de z .

3.1.4 Description des points intérieurs

Si au début du jeu de données, le nombre de points intérieurs, L , où il faut évaluer la solution est non nul, La dernière section du jeu de données contient la liste des points où

cette solution doit être évaluée. Cette évaluation est effectuée après résolution de l'équation intégrale.

- *Liste des points intérieurs* $PX(I)$, $PY(I)$, coordonnées des points intérieurs. Il doit y avoir au moins L couples de coordonnées.

3.2 Problème de Dirichlet à l'intérieur d'une sphère

L'équation de Laplace est séparable en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques et possède de nombreuses solutions analytiques sur ces géométries (Morse & Feshbach, 1953). Parmi celles-ci on a sélectionné une solution en coordonnées sphériques avec symétrie de révolution. Elle s'exprime de la façon suivante,

$$V_S(r, \theta) = r^n P_n(\cos \theta), \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (67)$$

où r et θ sont respectivement la distance à l'origine et l'angle du rayon vecteur avec l'axe des x et P_n représente les polynômes de Legendre. On notera que,

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta \quad (68)$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1) \quad (69)$$

Si on impose comme condition de Dirichlet sur la sphère de rayon unité,

$$V = V_S(1, \theta) = P_n(\cos \theta), \quad (70)$$

on doit trouver,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \left. \frac{\partial V_S}{\partial r} \right|_{r=1} = n P_n(\cos \theta). \quad (71)$$

La figure 15 montre une comparaison entre la solution analytique ($n = 1$) et la solution numérique pour un domaine comportant seulement 16 éléments. L'accord est remarquable. On note que les plus gros défauts sont situés aux pôles de la sphère.

La figure 16 montre une comparaison entre la solution analytique ($n = 2$) et la solution numérique pour un domaine comportant seulement 16 éléments. L'accord est également remarquable. On note de plus, comme précédemment, que les plus gros défauts sont situés aux pôles de la sphère.

Les résultats de l'étude de convergence en maillage sont consignés au tableau 4 pour deux problèmes de même type (70). Pour chaque simulation, on a calculé le maximum de l'écart entre la solution numérique et la solution analytique (71). On observe bien que la norme de l'erreur, ainsi définie, décroît comme le carré du nombre de noeuds, pour les grandes valeurs du nombre de noeuds. Lorsque l'on double le nombre de noeuds, la norme de l'erreur est divisée par 4. La méthode de collocation utilisée avec des éléments constants fournit donc une approximation du second ordre de la solution lorsque cette dernière et sa dérivée sont bornées.

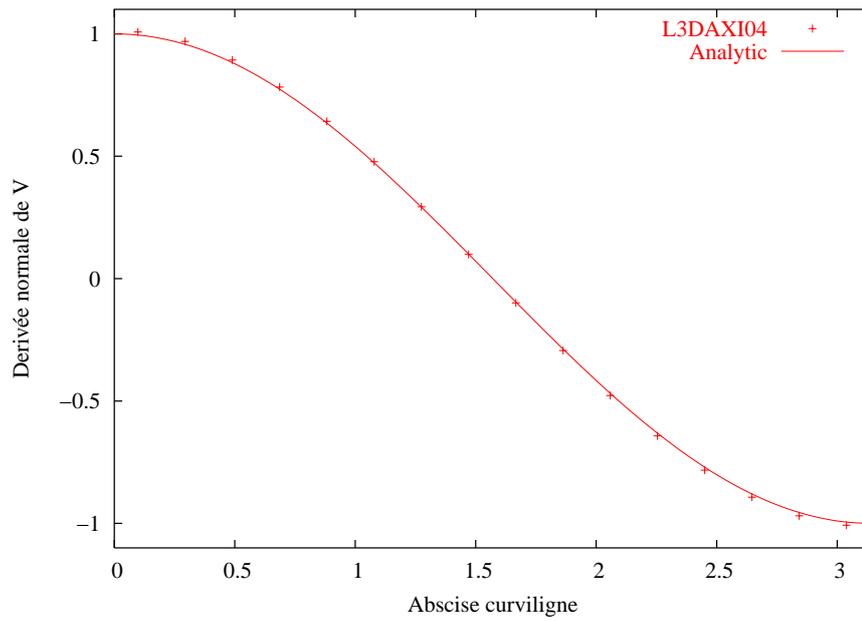


Figure 15: Comparaison entre la solution numérique (L3DAXI04) du problème de Dirichlet (70), pour $n = 1$ sur une sphère de rayon unité comportant 16 éléments égaux. Jeu de données: `TestAxi01.for`, Graphe: `TestAxi01-1.plt`.

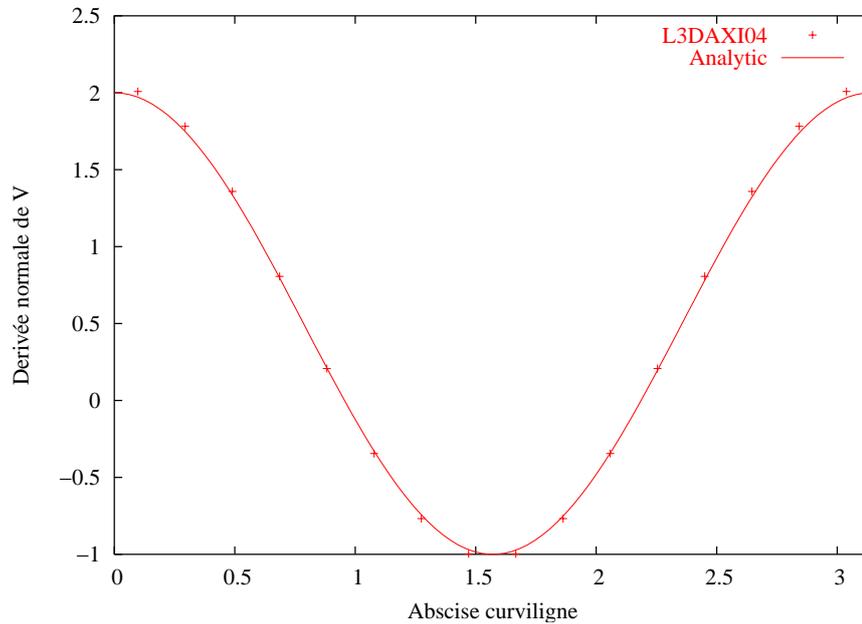


Figure 16: Comparaison entre la solution numérique (L3DAXI04) du problème de Dirichlet (70), pour $n = 2$ sur une sphère de rayon unité comportant 16 éléments égaux. Jeu de données: `TestAxi01.for`, Graphe: `TestAxi01-2.plt`.

Nombre d'éléments	max $\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n_a}, n = 1$	max $\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n_a}, n = 2$
8	$5,0 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$
16	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$3,7 \cdot 10^{-2}$
32	$3,2 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$
64	$8,0 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$
128	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$
256	$5,0 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$
512	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$4,2 \cdot 10^{-5}$
1024	$8,0 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$

Tableau 4 : Etude de la convergence en maillage du problème de Dirichlet (70) pour deux valeurs de n . L'indice a se réfère aux valeurs analytiques.

3.3 Problème de Dirichlet sur l'intérieur d'un cylindre

Considérons un cylindre de hauteur H et de rayon a . Le problème de Dirichlet particulier,

$$V_S(r,z) = 0, z = \pm H/2, \quad (72)$$

$$V_S(r,z) = \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right), r = a, \quad (73)$$

possède une solution analytique (Morse & Feshbach, 1953, p. 1259) de la forme,

$$V(r,z) = \frac{I_0(n\pi r/H)}{I_0(n\pi a/H)} \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \quad (74)$$

où I_n est la fonction de Bessel modifié de première espèce et d'ordre n . Sur la paroi cylindrique, la dérivée normale est donnée par,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{n\pi}{H} \frac{I_1(n\pi r/H)}{I_0(n\pi a/H)} \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right), \quad (75)$$

tandis que sur la paroi plane on a,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \pm \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=H,0} = \pm \frac{n\pi}{H} \frac{I_0(n\pi r/H)}{I_0(n\pi a/H)} \cos\left(\frac{n\pi z}{H}\right), \quad (76)$$

où le signe $+$ s'applique pour $z = H$ et le signe $-$ pour $z = 0$. La figure 17 montre que le flux calculé numériquement est correctement représenté même pour un nombre d'éléments limité. On observe toutefois que la solution présente un défaut localisé à l'intersection de la surface cylindrique et de la surface plane du cylindre. En dehors de ce défaut local la solution converge rapidement, c'est à dire comme $1/N^2$, où N est le nombre d'éléments. L'origine de ce défaut est identique à celui observé sur des problèmes de Dirichlet bidimensionnels sur un domaine comportant un angle. Il faut remarquer néanmoins que le flux converge relativement rapidement comme le montre le tableau 5. La convergence est en $1/N$ comme en 2D pour des problèmes mixtes. La valeur analytique du flux est calculée par intégration de (75) sur la surface latérale du cylindre. On obtient,

$$F = \pi \frac{D}{2} \int_0^H \frac{\partial V}{\partial r} dz = \pi DH \frac{I_1(n\pi a/H)}{I_0(n\pi a/H)} \quad (77)$$

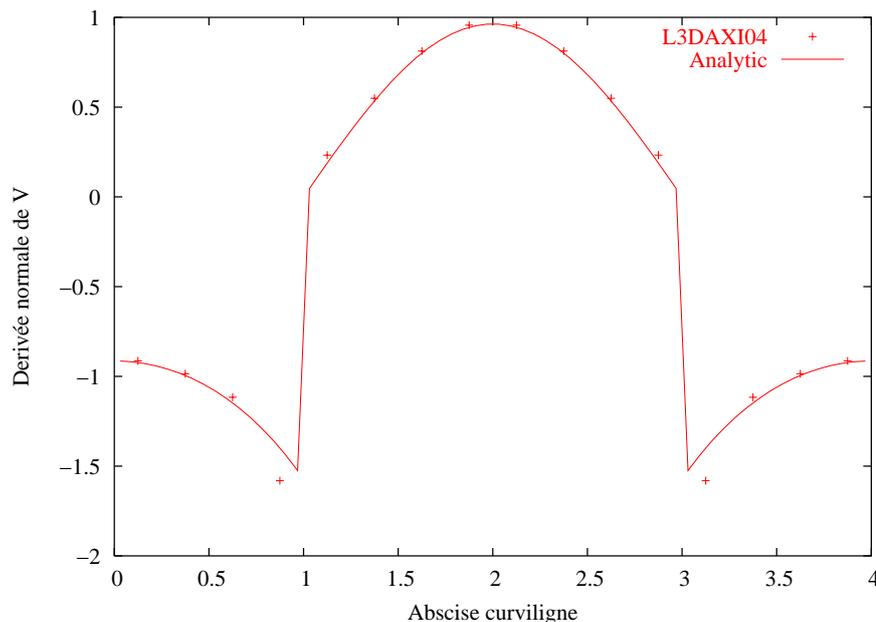


Figure 17: Comparaison entre la solution numérique (L3DAXI04) du problème de Dirichlet (74), pour $n = 1$ sur un cylindre de hauteur, $H = 2$, et de diamètre, $D = 2$, comportant 16 éléments de longueur égale sur la méridienne. Jeu de données: `TestAxi02.for`, Graphe: `TestAxi02-1.plt`.

N	F	E_F	$\max \left \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n_a} \right $	$\frac{1}{N} \sum \left \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n_a} \right ^2$
8	8,29965	0,59454	0,22559	0,11903
16	8,01293	0,30782	0,18173	0,06771
32	7,86298	0,15788	0,16043	0,04337
64	7,78534	0,08023	0,14959	0,02934
128	7,74561	0,04051	0,14405	0,02033
256	7,72548	0,02037	0,14130	0,01424
512	7,71533	0,01022	0,13990	0,01002
1024	7,71023	0,00512	0,13918	0,00707
∞	7,70511			

Tableau 5: Etude de la convergence en maillage du problème de Dirichlet (??) pour $n = 1$. L'indice a se réfère aux valeurs analytiques. Le flux analytique est calculé par (77). L'erreur sur le flux, E_F est la différence entre le flux calculé numériquement et le flux analytique (77).

Le tableau 5 montre bien que le problème de convergence du flux, évoqué plus haut, est localisé comme le montre la figure 17. En effet, L'erreur sur la densité de flux est calculée de deux façons. D'une part on étudie l'erreur maximum entre le calcul et la solution analytique sur tous les points du maillage et, d'autre part, l'écart quadratique moyen. La première tend vers une constante et ne décroît plus avec le raffinement du maillage tandis que l'autre décroît sensiblement avec N . Pour corriger ce défaut il suffit de procéder par affinement du maillage comme pour le problème mixte sur l'intérieur du cercle unité (voir section 2.4).

4 Programme de résolution de l'équation de Laplace 3D : L3D02

Cette section décrit le jeu de données du solver de l'équation de Laplace 3D, L3D02 et documente quelques exemples d'utilisation. Il décrit également sommairement un utilitaire de visualisation de maillage permettant de contrôler le jeu de données et la qualité de la solution.

Le système linéaire est résolu par défaut par une méthode itérative de la famille Gauss-Seidel. Le source (L3D02.for) peut être modifié pour utiliser la méthode du pivot partiel (changer la variable logique pivot de `.false.` à `.true.`). On rappelle toutefois qu'à partir d'un millier d'éléments la méthode itérative est plus rapide que la méthode directe du pivot partiel.

4.1 Constitution du jeu de données

Le jeu de données est constitué de quatre parties. Une première partie décrit la nature des frontières et les symétries du problème, la seconde donne la liste des extrémités des éléments, la troisième détaille la nature des conditions aux limites sur chaque élément et la dernière, optionnelle, indique la liste des points intérieurs au domaine où la solution doit être calculée.

4.1.1 Description du problème et de sa frontière

- *Titre de la simulation* : une ligne tronquée à 80 caractères.
- *Nombre d'éléments total, N* . Ce nombre est limité à 4600. Cette limite peut être modifiée dans L3D02.inc, variable Nmax.
- *Symétries du problème* : trois entiers NSX , NSY et NSZ . S'il n'y a pas de symétries dans le problème, les trois entiers sont nuls. Si le domaine et les conditions aux limites sont identiques lorsque l'on change x en $-x$, alors $NSX = 1$. Si le domaine est invariant en changeant x en $-x$ et que les conditions aux limites sont égales en valeur absolue mais opposées, alors $NSX = -1$. NSY et NSZ jouent le même rôle lorsque l'on change respectivement y en $-y$ et z en $-z$.
- *Nombre de points intérieurs* où doit être calculée la solution, L , après résolution de l'équation intégrale. Ce nombre est limité à 7000. Cette limite peut être modifiée dans L3D02.inc, en modifiant la variable Lmax.

4.1.2 Description des frontières

- *Liste des noeuds de chaque élément, Nel , $(X(i), Y(i), Z(i))$, $i = 1, Nel$* . Chaque élément doit être plan et peut comporter 3 ou 4 sommets. Chaque élément est constitué d'arêtes rectilignes joignant les sommets. Cette partie du jeu de données doit donc contenir N lignes. Nel est le nombre de sommets de chaque élément et vaut 3 ou 4. $(X(i), Y(i), Z(i))$ sont les coordonnées du $i^{\text{ème}}$ sommet.

- La numérotation des noeuds oriente la normale à chaque élément. La normale doit être extérieure au domaine de résolution. Elle est calculée à partir du produit vectoriel $P_1P_2 \times P_2P_3$. Il convient donc de numéroter correctement les sommets afin que la normale soit effectivement dirigée vers l'extérieur du domaine de résolution.
- Dans le cas d'un problème comportant des symétries, il est inutile de fournir tous les éléments de la frontière. La partie de la frontière à $x > 0$ resp. $y > 0$, $z > 0$ est suffisante. Les éléments manquants sont automatiquement calculés.

4.1.3 Description des conditions aux limites

La numérotation des éléments est imposée par la liste des éléments. Chaque élément doit être décrit par un entier donnant le type de la condition aux limites suivi d'une valeur réelle. Il ne doit y avoir qu'une description d'élément par ligne du jeu de données.

- $KODE(I) \leq 0$: Conditions aux limites de Dirichlet. La condition ordinaire de Dirichlet est $KODE(I) = 0$ suivi d'un nombre donnant la valeur du potentiel imposé au centre de l'élément. Une variante, $KODE(I) < 0$, permet d'individualiser une partie de la frontière sur laquelle est calculée, après résolution, le flux I , par intégration surfacique des valeurs des densités de flux relatives aux éléments comportant le code de conditions aux limites.
- $KODE(I) = 1$: Conditions aux limites de Neumann. L'indicateur de la condition de Neumann doit être suivi de la valeur imposée de la dérivée normale de l'inconnue au centre de l'élément.

4.1.4 Description des points intérieurs

Si au début du jeu de données, le nombre de points intérieurs, L , où il faut évaluer la solution est non nul, la dernière section du jeu de données contient la liste des points où cette solution doit être évaluée. Cette évaluation est effectuée après résolution de l'équation intégrale.

- *Liste des points intérieurs* $PX(I)$, $PY(I)$, $PZ(I)$, coordonnées des points intérieurs. Il doit y avoir au moins L triplets de coordonnées.

4.2 Outils de visualisation de maillage: 3DPS03

La réalisation de maillage et surtout l'orientation des faces doit pouvoir être contrôlée facilement. C'est pourquoi on propose d'utiliser 3DPS03 qui permet à la fois une vue du maillage en "fil de fer" et une visualisation du résultat de calcul. Pour la première tâche, le programme doit être appelé avec l'option '/W' ou sans option (par défaut) tandis que pour la seconde il faut utiliser l'option '/P' ou '/F'.

La figure 18 montre un maillage d'une sphère de rayon 1. Il est obtenu par projection du maillage d'un cube sur une sphère en calculant l'intersection de la sphère par la droite joignant chaque sommet du maillage cube et le centre de la sphère. L'outil de visualisation lit dans ce cas le jeu de données par défaut du solver 3D (L3D03.in) et produit une figure Postscript dans le fichier 3DPS.ps. Il est donc inutile d'effectuer le calcul pour visualiser

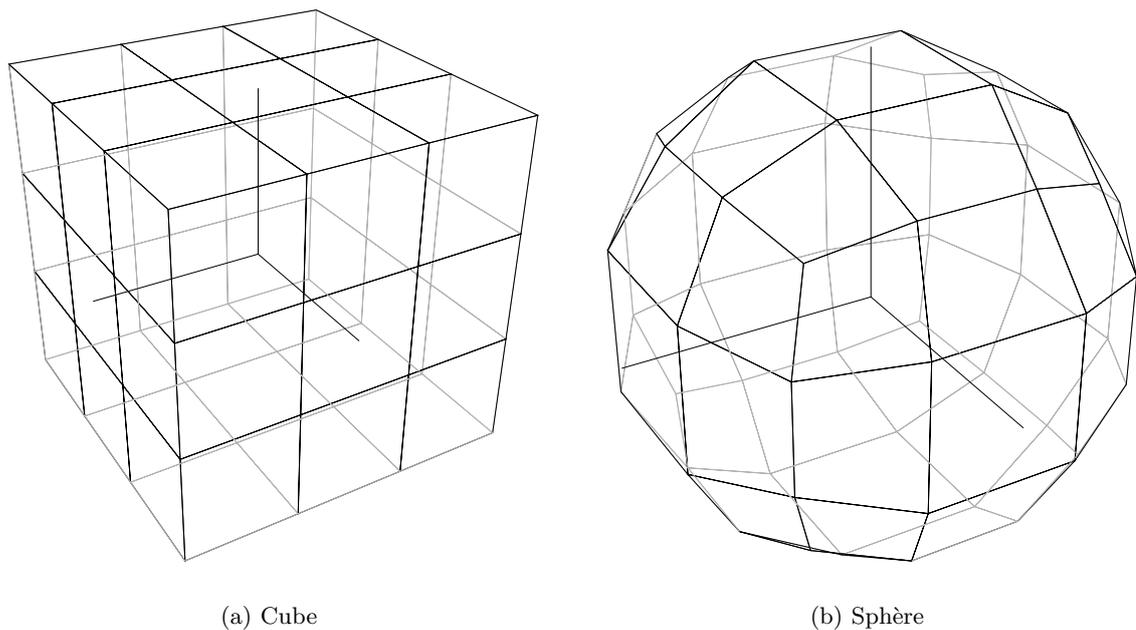


Figure 18 : Visualisation de deux maillages différents (a) un cube et (b) une sphère obtenue par projection du maillage du cube (a) sur une sphère. Maillage : `Test3D01.for`, Tracé : `3DPS03.for`.

le maillage.

Seul le maillage est représenté à la figure 18. On notera que certaines faces sont dessinées en noir tandis que les autres sont dessinées en gris. Cette convention repose sur l'orientation des faces implicite utilisée par le solveur 3D. Lorsque qu'une face est en trait noir, sa normale définie par le sens de parcours des extrémités des faces est orientée en direction de l'observateur (produit scalaire des deux vecteurs correspondant est négatif). Dans le cas contraire les faces sont dessinées en gris, ces dernières "tournant le dos à l'observateur". En conséquence, si l'on s'intéresse à un problème intérieur, 3DPS03 doit reproduire une vue en perspective avec les parties cachées en gris. Dans le cas contraire, ce logiciel permet de détecter les faces mal orientées. La direction des axes est illustrée par un trièdre dessiné sur la figure en trait noir. Par défaut l'axe de z est horizontal, orienté vers la gauche, l'axe des x est vertical ascendant

Après exécution du programme de tracé, il suffit de visualiser le fichier Postscript produit et il est, de plus, encore possible de modifier les paramètres de perspective. Si l'on désire quitter le programme il suffit de taper `CTRL+C`. Les paramètres modifiables sont les suivants.

- le point visé, AX , AY , AZ , par défaut l'origine,
- la distance entre l'appareil photo virtuel et le point visé, D ,
- Les angles définissant la direction de visée Th , et Ps correspondant aux deux angles θ et ψ des coordonnées sphériques,
- Une rotation est possible de l'appareil photo virtuel autour de l'axe de visée, soit Om cet angle
- Un facteur de Zoom, Zx . Il faut noter que l'agrandissement de la figure est calculé automatiquement de façon à représenter toute la figure sur la page. Ce facteur de zoom est appliqué sur le résultat de ce calcul, ce qui en général avec un facteur plus

grand que 1 ne permet plus de voir toute la figure mais seulement un détail choisi.

Il faut noter qu'une visualisation effectuée en choisissant des paramètres tels que l'observateur se trouve à l'intérieur du domaine visualisé peut conduire à des résultats inexploitable, voire à un arrêt critique du logiciel. Pour des raisons de simplicité, ces situations ne sont pas détectées systématiquement. Les unités d'angle sont en degrés et les coordonnées et distances diverses sont exprimées dans le repère décrivant le domaine et donc doivent être données avec les mêmes unités de longueur.

Lorsque l'on veut également visualiser la solution du problème, après exécution du calcul, il suffit d'utiliser 3DPS03 suivi de l'option "/P" pour visualiser en niveau de couleurs la fonction ou l'option "/F" pour représenter la dérivée normale. Le fichier par défaut de sortie, L3D02.out est alors lu après L3D02.in et les 3 paramètres suivants peuvent alors être modifiés. Ils sont relatifs au codage des couleurs.

- Min et Max représentent les bornes de variation de la fonction à représenter sur la palette de couleur. Par défaut ces valeurs sont fixées aux valeurs extrêmes observées.
- Ex, une valeur permettant de resserre la palette vers les valeurs maximales lorsque la valeur est supérieure à 1 et vers les valeurs minimales dans le cas contraire. La valeur 1 correspond à une échelle linéaire.

Ces dernières options du logiciel ne gère pas les parties cachées. Les faces sont simplement représentées dans leur ordre d'apparition dans le jeu de données.

4.3 Problème de Dirichlet sur l'intérieur d'une sphère

Considérons une sphère de rayon unité à l'intérieur de laquelle le problème de Dirichlet suivant doit être résolu,

$$V(r, \theta, \psi) = r^2(\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) = x^2 + y^2 - 2z^2. \quad (78)$$

où r , θ et ψ représente les coordonnées sphériques et x , y , z les coordonnées cartésiennes. V est une solution particulière de l'équation de Laplace avec symétrie de révolution puisqu'elle ne dépend pas de ψ . Sur la sphère, V est représenté par une seule harmonique sphérique d'ordre 2 et on vérifie aisément que,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=1} = 2(\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) = 2V(1, \theta, \psi). \quad (79)$$

L'évaluation de l'erreur de calcul peut être effectuée de manière simple si on considère cette dernière relation. L'erreur sur la dérivée normale est alors définie sur chaque élément par,

$$E_F = \frac{\partial V}{\partial n} - 2V. \quad (80)$$

La figure 19 montre la distribution de l'erreur sur la surface de la sphère pour quatre maillages analogues à ceux représentés à la figure 18 pour des nombres d'éléments croissants. On observe que pour l'immense majorité des points, l'erreur décroît avec l'augmentation du nombre d'éléments. Toutefois des défauts locaux persistent et l'erreur maximum ne décroît pas avec l'augmentation du nombre d'éléments. Les éléments pour lesquels l'erreur ne décroît pas comprennent une arête située sur le périmètre de chaque face du cube qui sert de base au maillage de la sphère. Les faces ainsi construites ne sont pas planes ce qui est contraire aux hypothèses de calcul des coefficients d'influence. La violation de

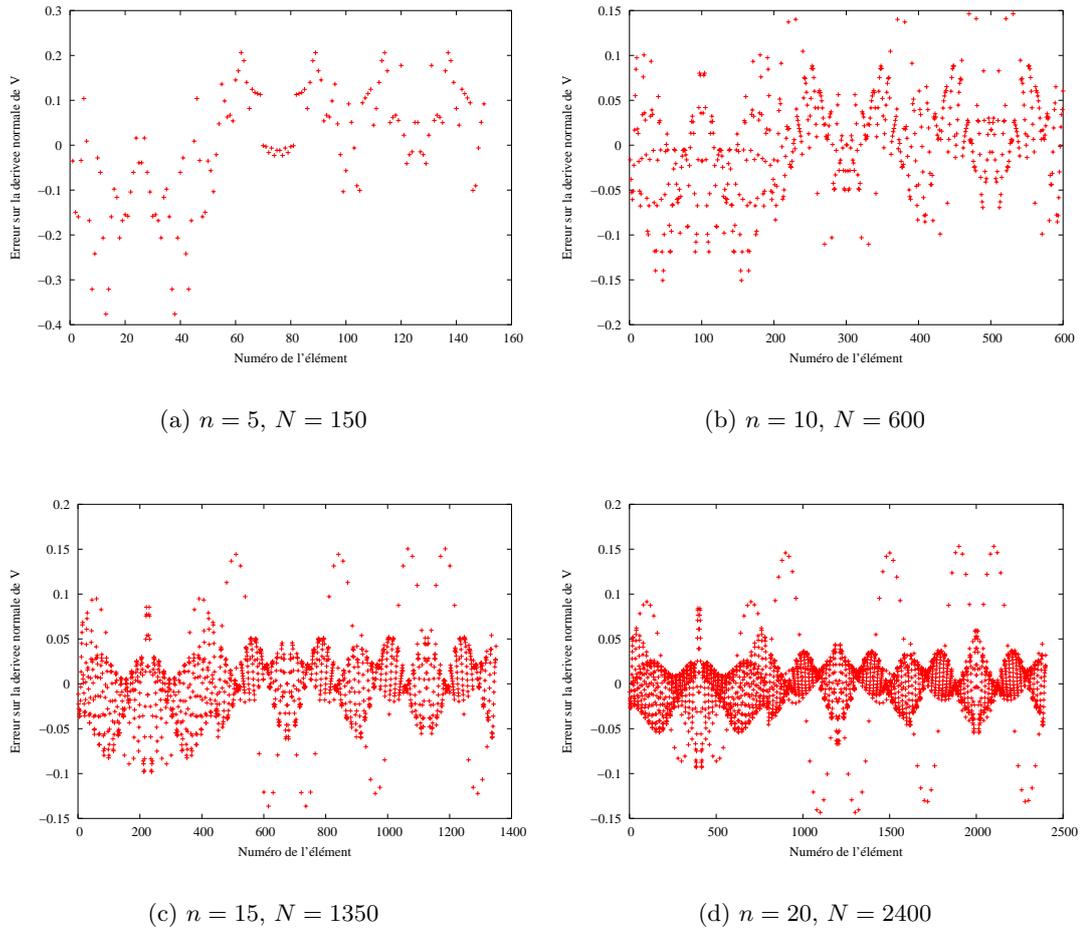


Figure 19 : Distribution de l'erreur sur le calcul de la dérivée normale pour le problème de Dirichlet 3D (78). n représente le nombre de segments découpé sur chaque arête du cube (voir figure 18), N représente le nombre d'éléments. Maillage: `Test3D01.for`, Tracé: `Comp3D01.plt`.

cette règle entraîne la non convergence localisée du calcul. Il faut retenir de cet exemple que l'utilisation d'éléments quadrangulaires s'accompagne impérativement de leur planéité.

La figure 20 Montre que lorsque le maillage est constitué d'éléments plans, la convergence est régulière. On observe notamment que l'erreur maximum comme sa valeur quadratique décroît comme l'inverse du nombre d'éléments. Cette décroissance est beaucoup moins rapide qu'en 2D ce qui rend très important les techniques de raffinement locales de maillage ainsi que la prise en compte des symétries.

Pour illustrer la prise en compte des symétries sur un problème vraiment 3D, on considère les fonctions propres de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques qui produisent un nombre important de cas test non triviaux. Ces dernières s'expriment sous la forme suivante,

$$\phi_{nm} = \left\{ \begin{array}{c} r^n \\ 1 \\ r^{n+1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} Y_{mn}^o(\theta, \psi) \\ Y_{mn}^e(\theta, \psi) \end{array} \right\} \text{ with } n \geq m \geq 0, \quad (81)$$

où Y_{mn}^o , and Y_{mn}^e sont respectivement les harmoniques sphériques impaires et paires de

première espèce selon la terminologie de Morse & Feshbach (1953, p. 1264, eq. 10.3.25) et où comme auparavant θ est l'angle du rayon vecteur avec l'axe des z . Les harmoniques sphériques sont liées aux fonctions de Legendre, P_n^m , par les relations suivantes,

$$Y_{mn}^o = \sin(m\psi)P_n^m(\cos\theta), \quad (82)$$

$$Y_{mn}^e = \cos(m\psi)P_n^m(\cos\theta). \quad (83)$$

Les fonctions de Legendre sont faciles à évaluer pour une valeur donnée de leur paramètre, $z = \cos\theta$, en considérant les relations de récurrence suivantes (Abramovitch & Stegun, 1965, eq. 8.5.1),

$$P_n^{m+1}(z) = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} ((n-m)zP_n^m(z) - (n+m)P_{n-1}^m(z)), \quad (84)$$

$$(n-m+1)P_{n+1}^m(z) = (2n+1)zP_n^m(z) - (n+m)P_{n-1}^m(z), \quad (85)$$

où les premiers termes sont donnés par,

$$P_0^0 = 1 \quad (86)$$

$$P_1^0 = \cos\theta, \quad P_1^1 = \sin\theta \quad (87)$$

$$P_2^0 = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1), \quad P_2^1 = \frac{3}{2}\sin 2\theta, \quad P_2^2 = \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad (88)$$

On considère la fonction propre du second ordre suivante, paire en y et impaire relativement aux deux autres coordonnées cartésiennes, voir (81) avec $m = 1$ et $n = 2$,

$$V(r, \theta, \psi) = r^2 \cos\psi P_2^1(\cos\theta) = 3xz \quad (89)$$

La figure 21 montre que l'erreur sur la dérivée normale (80) décroît comme le nombre d'éléments. L'erreur est principalement localisée sur les éléments triangulaires voisins du pôle du maillage (voir figure 21(a)). On observe que la distribution du potentiel et de sa dérivée normale (figure 21 (b) et (c)) sont bien proportionnelles en raison de la nature de la fonction propre considérée dans cette étude. On observe que l'erreur est très localisée et qu'à l'exception du pôle et de son voisinage, la solution obtenue est assez précise avec une erreur moyenne de l'ordre de 10^{-3} avec 4096 éléments.

Le tableau 6 complète cette étude de convergence de la solution par l'analyse de la solution en un point intérieur de la sphère de coordonnées sphériques, $r = \frac{1}{2}$, $\theta = \psi = \pi/4$. En ce point le potentiel analytique (90) vaut,

$$V\left(\frac{1}{2}, \pi/4, \pi/4\right) = \frac{3\sqrt{2}}{16} \approx 0,265165. \quad (90)$$

On observe que l'erreur décroît également comme l'inverse du nombre de faces. Elle est toutefois plus faible que l'erreur relative aux points situés sur la surface.

4.4 Problème mixte sur l'intérieur d'un cylindre

La fonction propre (89) peut permettre de formuler un problème mixte sur l'intérieur d'un cylindre. Compte tenu des symétries géométriques et de celles du potentiel choisi, $1/8$ de cylindre seulement est considéré. Pour poser le problème mixte, on calcule auparavant le gradient de V ,

$$\nabla V = 3x\mathbf{i} + 3z\mathbf{k} \quad (91)$$

n	N	$V(1/2, \pi/4, \pi/4)$	E_V
4	16	0,258511	-0,006654
8	64	0,263428	-0,001737
16	256	0,264731	-0,000434
32	1024	0,265057	-0,000108
64	4096	0,265138	-0,000027
	∞	0,265165	

Tableau 6 : Etude de la convergence en maillage en un point intérieur (voir (90)) du problème de Dirichlet sur l'intérieur d'une sphère (89). E_V représente l'erreur sur V , n est le nombre de parallèles et de méridiens organisant le maillage (voir figure 22) et N est le nombre d'éléments.

où \mathbf{i} , \mathbf{j} et \mathbf{k} représentent respectivement les vecteurs de base des coordonnées cartésiennes et où on rappelle que V est donné par (89). Sachant que sur chaque portion du cylindre, la normale extérieure est donnée par,

$$\mathbf{n}_{(z=1)} = \mathbf{k}, \quad (92)$$

$$\mathbf{n}_{(x^2+y^2=1)} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad (93)$$

on obtient pour chaque frontière les expressions suivantes pour la dérivée normale,

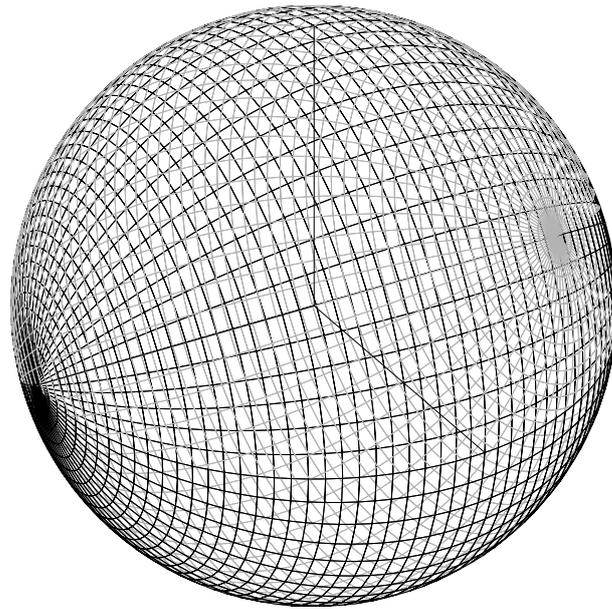
$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{z=1} = 3x, \quad (94)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{x^2+y^2=1} = 3xz. \quad (95)$$

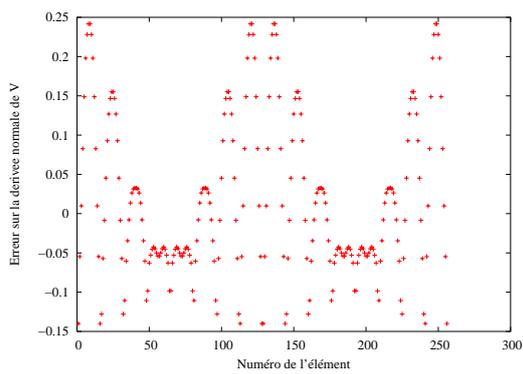
On forme donc le problème mixte suivant, en considérant une condition de Dirichlet sur la surface plane du cylindre ($z = 1$) et une condition de Neumann sur la paroi courbe ($x^2 + y^2 = 1$),

$$\begin{cases} V(x,y,z) = 3xz, & z = 1, \\ \frac{\partial V}{\partial n} = 3xz, & x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad (96)$$

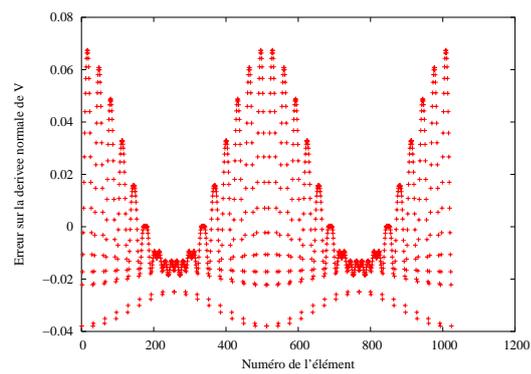
La figure 23 montre que l'erreur sur la solution numérique représentée par l'erreur sur le potentiel (en vert) sur la paroi plane et l'erreur sur la dérivée normale (en rouge) sur la paroi courbe décroît avec l'augmentation du nombre d'éléments. La convergence semble toutefois moins rapide que $1/N$ et possède également des défauts persistants localisés sur les éléments de la surface courbe comportant une arête commune à la surface plane du cylindre. Ce phénomène a déjà été observé pour les problèmes bidimensionnels et reste localisé comme le montre la figure 24 qui montre la maillage ainsi que la distribution de potentiel et de sa dérivée normale.



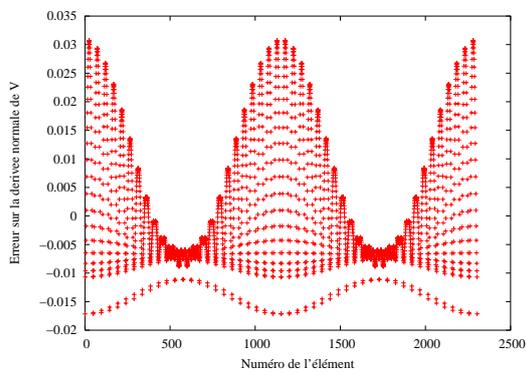
(a) Maillage en coordonnées sphériques, 4096 éléments



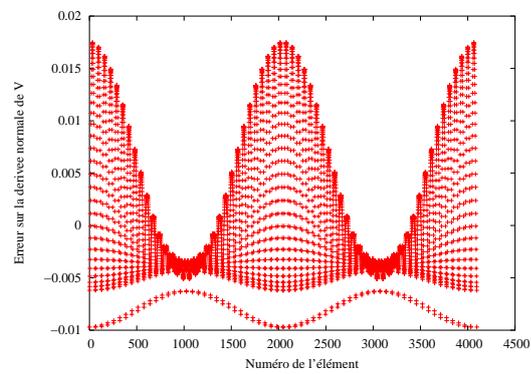
(b) $n = 16$, $N = 150$



(c) $n = 32$, $N = 600$



(d) $n = 48$, $N = 1350$



(e) $n = 64$, $N = 4096$

Figure 20 : Distribution de l'erreur sur le calcul de la dérivée normale pour le problème de Dirichlet 3D (78). n représente le nombre de segments découpé sur la méridienne de la sphère (a) , N représente le nombre d'éléments. Maillage: `Test3D02.for`, Tracé: `Comp3D02.plt`.

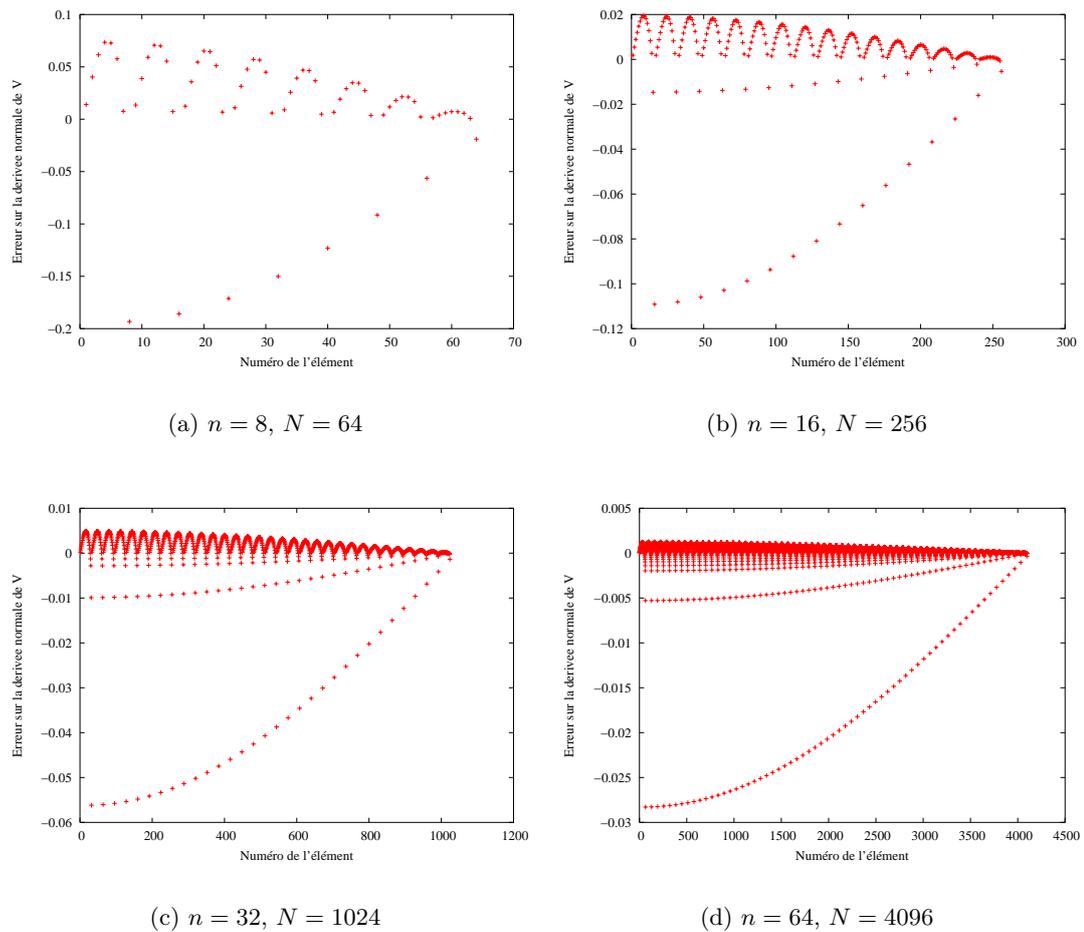


Figure 21 : Distribution de l'erreur sur le calcul de la dérivée normale pour le problème de Dirichlet 3D (89). n représente le nombre méridiens et de parallèles structurant le maillage de la sphère, N représente le nombre d'éléments sur $1/8$ de sphère. Maillage : `Test3D03.for`, Tracé : `Comp3D03.plt`.

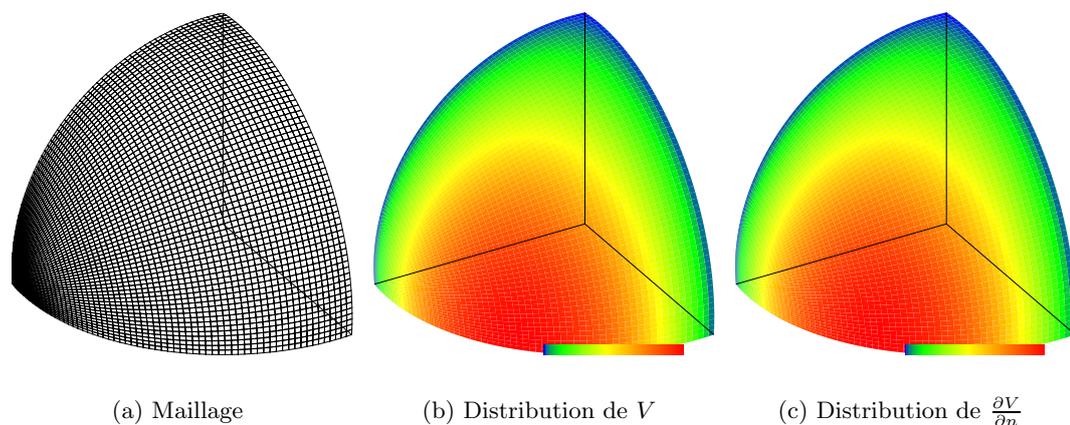


Figure 22 : Maillage (a), Distribution de V (b) et de sa dérivée normale (c) pour le problème de Dirichlet 3D (89). $n = 128$ représente le nombre méridiens et de parallèles structurant le maillage de la sphère, $N = 4096$ représente le nombre d'éléments sur $1/8$ de sphère. Les couleurs sont réparties entre le maximum et le minimum de la solution. Maillage : `Test3D03.for`, Tracé : `3DPS03.for`.

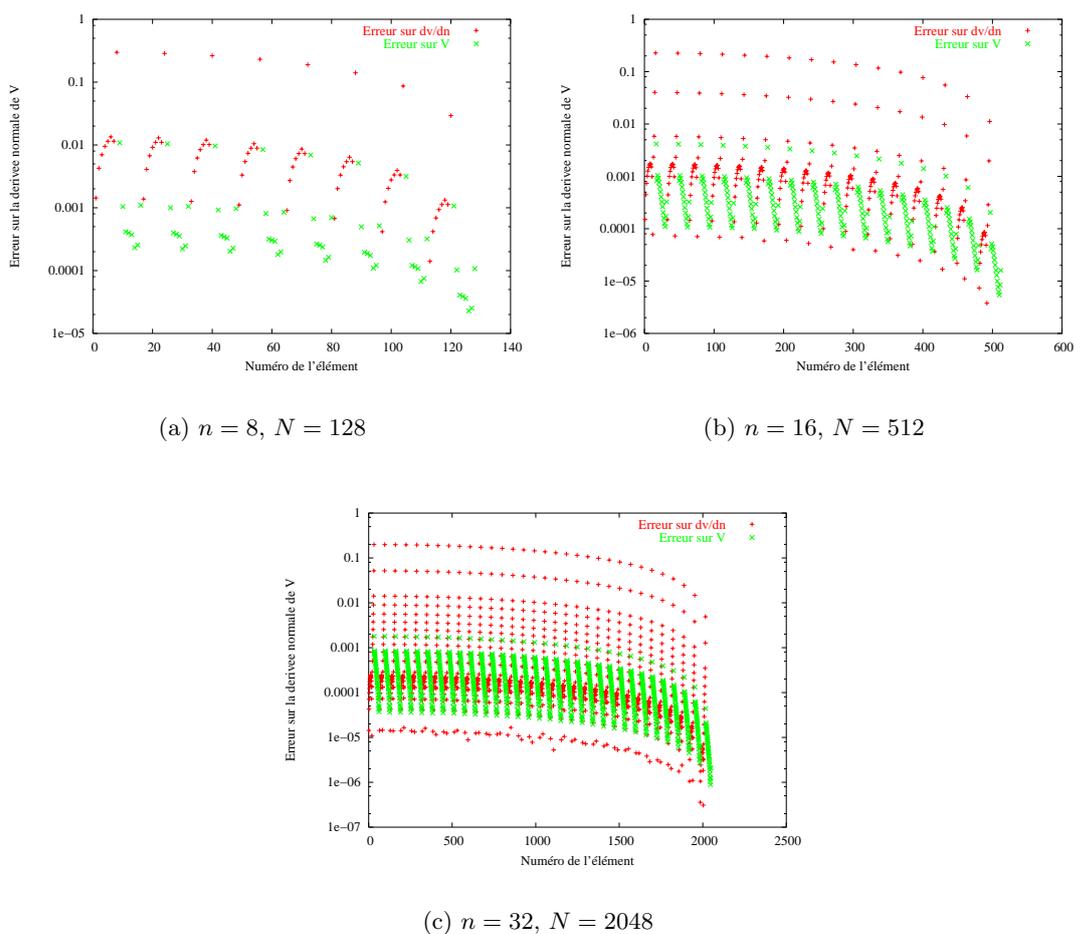


Figure 23 : Distribution de l'erreur sur le calcul sur le potentiel et sur la dérivée normale pour le problème mixte 3D (96). n représente le nombre méridiens et de parallèles structurant le maillage de la sphère, N représente le nombre d'éléments sur $1/8$ du cylindre sphère. Maillage : `Test3D04.for`, Tracé : `Comp3D04.plt`.

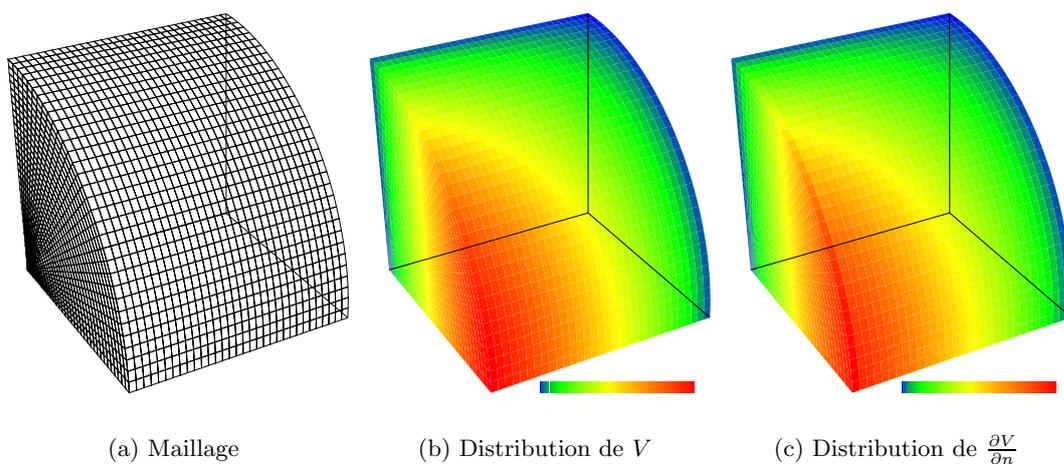


Figure 24 : Maillage (a), Distribution de V (b) et de sa dérivée normale (c) pour le problème mixte 3D (96). $n = 32$ représente le nombre méridiens et de parallèles structurant le maillage de la sphère, $N = 2048$ représente le nombre d'éléments sur $1/8$ du cylindre. Les couleurs sont réparties entre le maximum et le minimum de la solution. Maillage : `Test3D04.for`, Tracé : `3DPS03.for`.

A Solution du problème mixte de la sonde circulaire par la méthode des transformations conformes

A.1 Propriétés des fonctions elliptiques

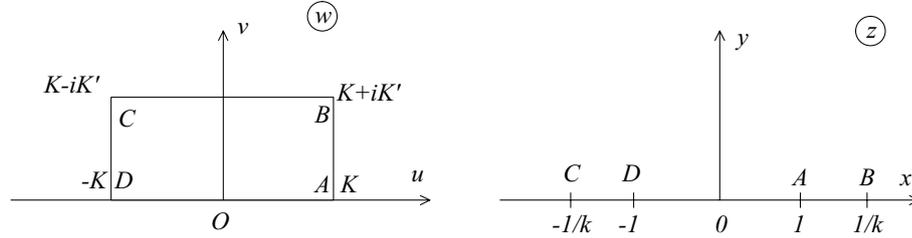


Figure 25 : Plans complexes permettant de définir la fonction $\text{sn}(z)$.

La fonction complexe qui effectue la transformation conforme du rectangle $ABCD$ du plan, w , décrit à la figure 25 sur le demi plan supérieur, z , peut être obtenue par application du théorème de Schwartz Christoffel. On obtient (Lavrentiev & Chabat, 1977, p. 184),

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (97)$$

La transformation inverse définit le sinus elliptique,

$$z = \text{sn}(w) \quad (98)$$

où k est le module des fonctions elliptiques. Lorsque $k = 0$ le sinus elliptique se confond avec le sinus trigonométrique et lorsque $k = 1$, le sinus elliptique correspond à l'argument tangente hyperbolique. La fonction sn est doublement périodique. Ces deux périodes sont $4K$ et $2iK'$. K est l'intégrale elliptique complète de deuxième espèce définie par,

$$K(k) \triangleq \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} \quad (99)$$

K est fonction du module k . K' est la valeur de K pour la valeur complémentaire de k , nommée k' définie par,

$$K' = K(k'), \quad k'^2 = 1 - k^2. \quad (100)$$

Pour les calculs pratiques on consultera par exemple Abramovitch & Stegun (1965) et Byrd & Friedman (1971). On donnera néanmoins ici les formules nécessaires aux calculs.

A.2 Sonde circulaire

On définit le potentiel complexe, F , comme la fonction du plan complexe, ayant le potentiel V comme partie réelle et la fonction de courant ψ comme partie imaginaire. On a,

$$F = V + i\psi \quad (101)$$

Les transformations homographiques conservent les cercles et les droites. On utilise cette propriété que l'on utilise pour transformer l'intérieur du cercle sur le demi plan supérieur.

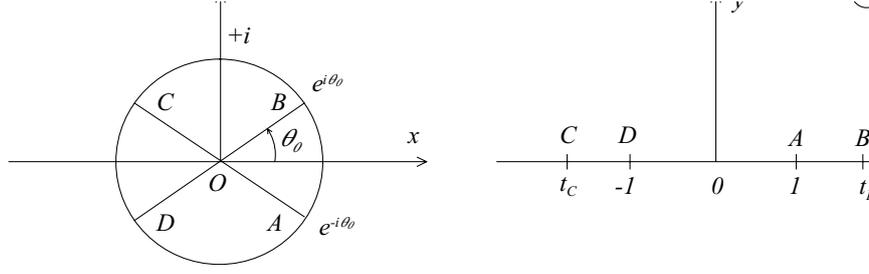


Figure 26 : Plans complexes utilisés pour définir la transformation de l'intérieur du cercle unité sur plan z , sur le demi plan supérieur t .

Pour que dans le plan t (figure 26) on ait l'image de $-i$ en 0 et l'image de i à l'infini, il faut nécessairement,

$$t = \gamma \frac{z + i}{z - i} \quad (102)$$

On calcule γ en imposant l'image de A en $+1$.

$$t_A = i\gamma \frac{\cos \theta_0}{1 + \sin \theta_0} = 1 \quad (103)$$

L'affixe de B dans le plan t est donc fixée par,

$$t_B = \frac{1 + \sin \theta_0}{1 - \sin \theta_0} \quad (104)$$

Le plan physique z se transforme par le potentiel (méthode de l'hodographe) en un rectangle puisque la sonde est limitée par deux frontières à potentiel imposé (AB et CD) et deux lignes de courant (AD et BC). Sur AB le potentiel vaut 1 et sur CD il vaut -1 . La ligne de courant AD est placée à 0 par symétrie et BC est à ψ_0 , à un facteur 2 près le courant traversant le milieu. D'après les propriétés des fonctions elliptiques, on passe du demi plan supérieur au plan de l'hodographe par,

$$F = \frac{1}{K} \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \quad (105)$$

On voit donc que lorsque k est fixé, le courant est automatiquement imposé par les propriétés des fonctions elliptiques. On a

$$\psi_0 = \frac{K'}{K} \quad (106)$$

La relation liant le module des fonctions elliptiques avec l'angle des électrodes s'obtient en identifiant les affixes de B dans les plans t des figures 26 et 27. On obtient,

$$\frac{1}{k} = \frac{1 + \sin \theta_0}{1 - \sin \theta_0} \quad (107)$$

La procédure de calcul est alors la suivante. On se donne la géométrie c'est-à-dire l'angle des électrodes θ_0 . Puis on calcule le module k des fonctions elliptiques par (107). Puis on calcule le nome q pour obtenir le courant ψ_0 . Le nome est lié aux intégrales elliptiques complètes par,

$$q \triangleq e^{-\pi \frac{K'}{K}} \quad (108)$$

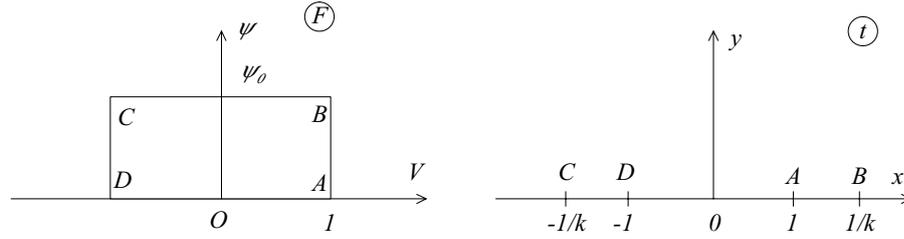


Figure 27 : Plan complexe de l'hodographe F et plan intermédiaire t .

On l'obtient par développement en utilisant la formule (910.01) de Byrd & Friedman (1971, p.300),

$$q = \frac{k_1}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{k_1}{2} \right)^4 + 15 \left(\frac{k_1}{2} \right)^8 + 150 \left(\frac{k_1}{2} \right)^{12} + 1707 \left(\frac{k_1}{2} \right)^{16} + \dots \right] \quad (109)$$

où le module k_1 est défini par,

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \quad k'^2 = 1 - k^2 \quad (110)$$

Puis on calcule l'intégrale elliptique complète par la formule (17.3.22) d'Abramovitch & Stegun (1965),

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^s}{1 + q^{2s}} \right) \quad (111)$$

Pour calculer $F(z)$, qui correspond à la solution recherchée, on change légèrement de notation,

$$F = \frac{1}{K} \operatorname{sn}^{-1} t = \frac{1}{K} \int_0^{\sin^{-1} z} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}} \quad (112)$$

où t est calculé par la transformation (102) prenant en compte la condition (103). F est donc lié aux intégrales elliptiques incomplètes par,

$$F = \frac{\operatorname{sn}^{-1} t}{K} = \frac{1}{K} F(\varphi \setminus \alpha) \quad (113)$$

L'intégrale elliptique incomplète est calculée par la méthode de réduction proposée par Abramovitch & Stegun (1965). Cette méthode permet de mettre en relation deux intégrales elliptiques incomplètes dont l'argument et le modules sont liés. La récurrence permet de d'augmenter le module jusqu'à ce qu'il devienne suffisamment proche de 1 ($\alpha = \pi/2$) où l'intégrale possède une expression analytique,

$$F\left(\varphi \setminus \frac{\pi}{2}\right) = \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) \quad (114)$$

La récurrence proposée par Abramovitch & Stegun (1965, équations 17.5.11 et 17.5.12) est basée sur la transformation de Landen,

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha, \varphi_0 = \varphi \\ (1 + \cos \alpha_{n+1})(1 + \sin \alpha_n) = 2 & \alpha_{n+1} > \alpha_n \\ \sin(2\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \sin \alpha_n \sin \varphi_n & \varphi_{n+1} < \varphi_n \\ F(\varphi_{n+1} \setminus \alpha_{n+1}) = \frac{2}{1 + \sin \alpha_n} F(\varphi_n \setminus \alpha_n) \end{cases} \quad (115)$$

La partie réelle de F donne le potentiel et sa partie imaginaire donne la fonction de courant. On déduit la densité de courant par dérivation de F ,

$$\frac{dF}{d\theta} = F'(t) \frac{dt}{dz} \frac{dz}{d\theta} = \frac{2\gamma z}{K(z-i)^2} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (116)$$

Références

- Abramovitch, M., & Stegun, I. A. 1965. *Handbook of mathematical functions*. Dover.
- Brebbia, C. A., & Dominguez, J. 1989. *Boundary elements, an introductory course*. Computational mechanics publications.
- Byrd, P. F., & Friedman, M. D. 1971. *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*. Springer-Verlag.
- Canot, E. 1989. *Généralisation de la méthode intégrale aux frontières pour les systèmes fluide-fluide*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Hess, J. L., & Smith, A. M. O. 1967. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. *Pages 1–138 of: Kucheman, D. (ed), Progress in Aeronautical Science, vol. 8*. Pergamon.
- Lavrentiev, M., & Chabat, B. 1977. *Méthodes de la théorie des fonctions complexes*. MIR.
- Lemonnier, H., Nakach, R., Favreau, C., & S.Selmer-Olsen. 1991. Sensitivity analysis of an impedance void meter to the void distribution in annular flow: a theoretical study. *Nuclear Engineering and Design*, **126**(1), 105–112.
- Morse, P. M., & Feshbach, H. 1953. *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill.
- Ramachandran, P. A. 1994. *Boundary element methods in transport phenomena*. Computational mechanics publications and Elsevier.