

**APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS DE  
FRONTIERE AUX ECOULEMENTS DIPHASIQUES ET AUX  
TECHNIQUES DE MESURE CORRESPONDANTES**

Hervé Lemonnier, DTP/SMTH, CEA/Grenoble, 38054 Grenoble cedex 9  
Tél. : 04 38 78 45 40, Fax : 04 38 78 50 36, Mél. : *herve.lemonnier@cea.fr*

Notes distribuées au cours de l'Ecole CEA/EDF/INRA : Problèmes non linéaires appliqués,  
décembre 1996.

Mise à jour de décembre 2001.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>La méthode des éléments de frontière pour l'équation de Laplace</b>	<b>4</b>
2.1	Problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace 2D . . . . .	5
2.2	Problème mixte pour l'équation de Laplace 2D . . . . .	9
2.3	Modélisation des impédances d'interface . . . . .	10
2.4	Problèmes sur des domaines non simplement connexes . . . . .	11
2.5	Optimisation d'un capteur densitométrique capacitif . . . . .	12
2.6	Un problème inverse : la tomographie d'impédance . . . . .	14
2.7	Analyse de la stabilité d'une interface . . . . .	16
<b>3</b>	<b>La méthode des singularités pour les écoulements potentiels</b>	<b>19</b>
3.1	Equation intégrale pour la vitesse . . . . .	19
3.2	Minimisation des erreurs numériques . . . . .	20
3.3	Écoulements potentiels avec cavitation . . . . .	22
<b>4</b>	<b>La méthode des éléments de frontière pour l'équation de Stokes</b>	<b>23</b>
4.1	Equation intégrale pour le champ de vitesse . . . . .	23
4.2	Problème de Dirichlet pour la vitesse . . . . .	25
4.3	La déformation des masses fluides en mouvement . . . . .	26
<b>5</b>	<b>La méthode des éléments de frontière pour l'équation de diffusion</b>	<b>28</b>
5.1	Equation intégrale pour le champ de température instationnaire . . . . .	28
5.2	Méthode des éléments de frontière pour le champ de température instationnaire . . . . .	29
5.3	Mise en oeuvre pratique . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Vers la prise en compte des non linéarités</b>	<b>32</b>
	<b>Références</b>	<b>33</b>

## 1 Introduction

De nombreux problèmes d'écoulements diphasiques ou de conception d'instrumentation pour les écoulements diphasiques reposent sur la résolution d'une ou plusieurs équations aux dérivées partielles linéaires. Des difficultés particulières apparaissent souvent lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes inverses, à frontière libre ou d'identification non linéaires vis-à-vis de la géométrie du domaine ou des conditions aux limites. Les domaines de résolution des équations étant parfois non simplement connexes ou inconnus et parfois les deux, la résolution par la méthode des éléments finis peut s'avérer lourde de mise en oeuvre.

De plus, certains de ces problèmes inverses sont mal conditionnés et la recherche de méthodes de résolution précises et rapides peut s'avérer décisive. La méthode des éléments de frontière prend avantage du caractère linéaire des équations pour réduire la dimension du problème d'une unité au moins. Les paragraphes qui suivent donnent quelques exemples de problèmes rencontrés en écoulement diphasique qui ont été résolus par ces méthodes.

La conception de certains dispositifs de mesure comme les densitomètres à impédance requièrent la résolution de l'équation du potentiel électrique. L'optimisation et l'étalonnage de ces dispositifs reposent entièrement sur la possibilité de simuler fidèlement leur comportement lorsqu'ils sont parcourus par un écoulement diphasique (Lemonnier *et al.*, 1991). Le développement de techniques de tomographie d'impédance pour déterminer la distribution des phases dans un volume donné nécessite, de plus, de résoudre un problème inverse. En effet, selon cette technique il s'agit d'identifier, c'est-à-dire de reconstruire, le milieu qui produit la signature électrique mesurée (Lemonnier & Peytraud, 1995).

Ces trois problèmes nécessitent de pouvoir résoudre efficacement et précisément une ou plusieurs équations de Laplace comportant éventuellement une ou plusieurs frontières libres. L'équation de Laplace est aussi un modèle pour la conduction de la chaleur et l'optimisation du nombre et de la forme des canaux de refroidissement d'une aube de turbine est un exemple de problème de Laplace inverse à géométrie non simplement connexe (Dulikravitch & Martin, 1994). L'équation de Laplace est encore un modèle pour les écoulements potentiels caractérisés par des effets d'inertie prépondérants. La description de l'instabilité de Rayleigh-Taylor peut ainsi être considérée et étudiée comme un problème à frontière libre pour deux équations de Laplace (Canot, 1989). La modélisation de la cavitation développée sur un profil d'aile peut aussi être formulée comme un problème inverse géométrique pour l'équation de Laplace (Lemonnier & Rowe, 1988).

Dans certains dispositifs expérimentaux, il faut déterminer le flux de chaleur s'écoulant d'un fluide vers une paroi. Lorsque les mesures directes du flux de chaleur sont impossibles, il faut souvent se satisfaire d'une estimation du flux de chaleur à partir de mesure de température effectuées en plusieurs points de la paroi. Les écoulements diphasiques étant par nature intermittents, il est alors nécessaire de résoudre le problème inverse de la diffusion de la chaleur (Lagier, 1999).

Les écoulements à faibles nombres de Reynolds sont régis par les équations de Stokes qui sont linéaires vis-à-vis de la vitesse et de la pression. La modélisation de la déformation d'une masse fluide s'écoulant dans un milieu infini sous l'action de la gravité ou sa sustentation aérodynamique sur un film d'air nécessite la résolution de deux problèmes de Stokes comportant également une frontière libre (Rocchi Tavares, 1992).

Bien d'autres problèmes (Bui *et al.*, 1994) comme la diffusion d'une onde ultrasonore ou l'identification de la forme d'un diffuseur par son rayonnement diffusé, nécessitent la résolution

de problèmes d'Helmholtz direct ou inverse. Les équations de l'élasticité linéaire et certains problèmes liés au contrôle non destructif de pièces mécaniques nécessitent encore de résoudre des problèmes inverses linéaires ou non.

La liste des problèmes inverses résolus ou non par la méthode des éléments de frontières est quasi illimitée et on se bornera ici à illustrer la mise en oeuvre de la méthode des éléments de frontière pour l'équation de Laplace, les équations de Stokes et l'équation de diffusion de la chaleur. Il semble que la paternité de ces méthodes revienne aux avionneurs qui avait dès les années 60 développé très largement les méthodes de singularités pour les écoulements potentiels, *the panel method* (Hess & Smith, 1967, Bousquet, 1990).

La popularité de ces méthodes grandissant de jours en jours, des revues comme *Engineering analysis with boundary elements* (Elsevier) ou *Inverse problems in engineering* (Gordon and Breach) y sont entièrement consacrées et de nombreux livres de référence présentent enfin clairement ces méthodes. En allant des plus pragmatiques à ceux privilégiant une axiomatique plus rigoureuse on peut citer par exemple : les ouvrages de Brebbia et de ses collègues (Brebbia & Dominguez, 1989, Brebbia *et al.*, 1984), puis celui de Ramachandran (1994) et enfin un livre en français de Marc Bonnet (Bonnet, 1995). Certains de ces livres comportent même de nombreux problèmes résolus et des programmes sur support informatique qui permettent une première mise en oeuvre en quelques heures.

## 2 La méthode des éléments de frontière pour l'équation de Laplace

La formulation intégrale d'un problème différentiel linéaire s'exprime très simplement dans le cas de l'équation de Laplace. On montre comment résoudre un problème de Dirichlet sur un domaine simplement connexe, puis comment les conditions aux limites mixtes sont prises en compte simplement. Ensuite, on montre comment résoudre plusieurs problèmes de Laplace dans des domaines emboîtés et on présente trois exemples d'application.

Dans un milieu électrique conducteur, les courants à basse fréquence sont régis par la loi d'Ohm,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{j}$  est la densité de courant,  $\sigma$  est la conductivité électrique et  $\mathbf{E}$  est le champ électrique. Le bilan des charges électriques se traduit par,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2)$$

Le champ électrique dérivant du potentiel électrique  $V$ , ce dernier satisfait l'équation,

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = 0. \quad (3)$$

Lorsque la conductivité est uniforme cette équation se confond avec l'équation de Laplace. Dans un densitomètre à impédance, on excite le milieu diphasique en portant à un potentiel déterminé des électrodes affleurant la paroi (condition de Dirichlet). Sur les autres parties du dispositif les parois sont isolantes et la densité de courant normale est nulle (condition de Neumann). L'objet principal de la simulation du fonctionnement du densitomètre est de calculer le courant traversant le milieu diphasique. Il s'obtient par intégration de la densité de courant sur les électrodes.

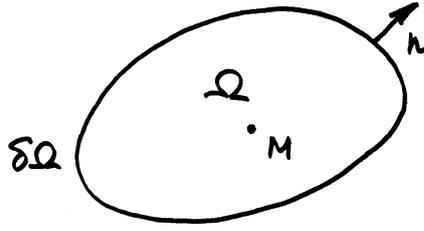


Figure 1 : Définition du domaine pour le problème de Dirichlet

## 2.1 Problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace 2D

Soit un domaine  $\Omega$ , limité par la frontière  $\partial\Omega$ . Soit  $\mathbf{n}$  la normale extérieure au domaine et supposons, par souci de simplification que la frontière admette en tout point un plan tangent. Considérons le problème de Dirichlet pour le potentiel  $V$  et soit  $V_S$  le potentiel donné sur la frontière  $\partial\Omega$ . Pour résoudre ce problème on introduit une fonction auxiliaire,  $G$ , une fonction de Green du laplacien, solution des équations suivantes,

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \text{ avec } G \rightarrow 0, \text{ quand } r \triangleq |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow 0, \quad (4)$$

où  $\mathbf{x}'$  est la position de la source. L'expression de  $G$  s'obtient simplement grâce au théorème de la divergence appliquée sur une boule  $B(r)$  centrée sur l'origine et de rayon  $r$ . En considérant la symétrie de révolution du problème on a,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = G(r), \quad (5)$$

$$\int_{B(r)} \nabla \cdot \nabla G \, d\Omega = \int_{\partial B(r)} \nabla G \cdot \mathbf{n} \, dS = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si } \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases} \quad (6)$$

ce qui donne selon le nombre de dimension de l'espace considéré,

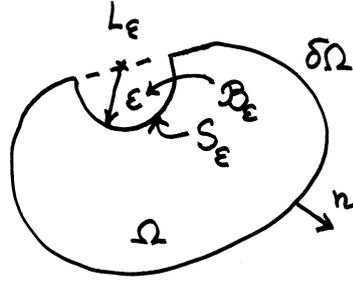
$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} \frac{\ln(r)}{2\pi} & \text{en 2D} \\ \frac{-1}{4\pi r} & \text{en 3D} \end{cases} \quad (7)$$

La fonction de Green permet d'obtenir la formulation intégrale du problème de Dirichlet par application de la formule de Green au potentiel recherché,  $V$ , et à la fonction de Green définie à l'équation 4. Compte tenu de la définition de  $G$  on a,

$$\int_{\Omega} (V \nabla^2 G - G \nabla^2 V) \, d\Omega' = \int_{\partial\Omega} V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} \, dS' - \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial V}{\partial n} \, dS' = \begin{cases} V(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \bar{\Omega} \end{cases} \quad (8)$$

Cette équation montre que le potentiel en tout point intérieur au domaine ne dépend que de la valeur de deux fonctions sur la frontière. La détermination complète de la fonction harmonique  $V$  est contenue. Cela démontre que les valeurs de la fonction à l'intérieur du domaine sont non essentielles. Lorsque la valeur de  $V$  et  $\partial V / \partial n$  sont connues sur le contour l'équation 8 permet de recalculer toutes les valeurs de  $V$  dans le domaine  $\Omega$ .

Lorsque le point  $\mathbf{x}$  se situe exactement sur la frontière du domaine, on obtient une expression légèrement différente compte tenu que la première intégrale de surface, le potentiel de double couche, est discontinue au passage de la frontière. Une démonstration peut en être obtenue en considérant le domaine décrit à la figure 2 où  $\Omega$  a été amputé d'une demie boule de rayon  $\epsilon$  et de



**Figure 2 :** Définition du domaine auxiliaire pour la démonstration de l'équation 13

centre  $\mathbf{x}$ . L'équation 8 appliquée en un point  $\mathbf{x}$  qui est maintenant extérieur au nouveau domaine donne,

$$0 = \int_{\Omega - B_\epsilon} (V \nabla^2 G - G \nabla^2 V) d\Omega' = \int_{\partial\Omega - L_\epsilon} V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} dS' - \int_{\partial\Omega - L_\epsilon} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial V}{\partial n} dS' + \int_{S_\epsilon} V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} dS' - \int_{S_\epsilon} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial V}{\partial n} dS',$$

où  $L_\epsilon$  est la fraction de  $\partial\Omega$  appartenant à  $B_\epsilon$  et  $S_\epsilon$  est la frontière de la demi boule  $B_\epsilon$  intérieure au domaine  $\Omega$ . On reconnaît immédiatement que si l'intégrale existe alors,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega - L_\epsilon} \left( V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS' = \int_{\partial\Omega} \left( V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS' \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (9)$$

De plus, en 2D, si on considère l'expression de la fonction de Green (7) on a,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} dS' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} V(\mathbf{x}') \int_{S_\epsilon} \frac{-1}{2\pi\epsilon} \epsilon d\theta = \frac{-V(\mathbf{x}')}{2}. \quad (10)$$

On notera que la démonstration en 3D est identique. Enfin si la densité de courant,  $j$ , est faiblement singulière, il existe  $K$  et  $\alpha$  réels tels que,

$$|j(\epsilon)| < K\epsilon^{-\alpha}, \quad \alpha < 1, \quad (11)$$

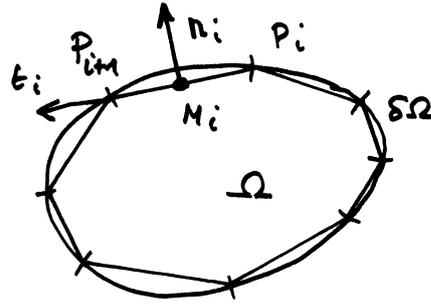
ce qui conduit nécessairement à l'élimination de la dernière intégrale car,

$$\left| \int_{S_\epsilon} jG dS' \right| < \int_{S_\epsilon} \frac{K\epsilon^{-\alpha}}{2\pi} \ln \epsilon \epsilon d\theta = \frac{K\epsilon^{1-\alpha}}{2} \ln \epsilon. \quad (12)$$

On obtient alors la relation intégrale entre potentiel et flux qui résout le problème de Dirichlet,

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} V(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} dS' - \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial V}{\partial n} dS' = \frac{V(\mathbf{x}')}{2}.} \quad (13)$$

Cette relation fournit la relation explicite entre la distribution de potentiel sur le contour, l'*excitation électrique*, dans le cas du densitomètre à impédance et la densité de courant  $j$ , le *signal*, que l'on cherche à mesurer. C'est très précisément ce que l'on cherche à calculer dans notre problème. De même, dans un problème de conduction, cette équation lie directement la *température* de paroi au *flux de chaleur*. On cherche en général à déterminer l'un connaissant l'autre et l'équation 13 en représente la solution sous forme implicite.



**Figure 3 :** Discrétisation du domaine.  $M_i$  est le point de collocation,  $P_i$  est la première extrémité du  $i^{\text{ème}}$  élément. Le contour est orienté positivement dans le sens trigonométrique direct. La numérotation des points suit également ce sens.

Pour un problème de Dirichlet, le potentiel est connu sur la surface et on doit résoudre l'équation intégrale suivante en  $j$ , le gradient normal du potentiel,

$$\int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') j(\mathbf{x}') dS' = \int_{\partial\Omega} V_S(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n} dS' - \frac{V_S(\mathbf{x}')}{2}, \quad x \in \partial\Omega, \quad (14)$$

où le second membre est connu. Cette équation de *Fredholm de première espèce* peut être résolue numériquement par une méthode de collocation après discrétisation. C'est l'essence même de la méthode des éléments de frontière.

La méthode de résolution de (13) la plus simple et la plus populaire consiste à découper la frontière en éléments linéaires pour un problème bidimensionnel ou en facettes planes à contour polygonal pour des problèmes 3D. Pour les problèmes 3D axisymétriques, on peut raisonner sur une méridienne. Par simplicité, illustrons la mise en oeuvre de la méthode sur un problème bidimensionnel.

En choisissant des éléments constants, c'est-à-dire, en supposant que sur chaque élément, le potentiel et sa dérivée normale sont uniformes, on obtient la version discrétisée de l'équation 13,

$$\frac{V(M_i)}{2} = \sum_j \left\{ V(M_j) \int_{P_j}^{P_{j+1}} \frac{\partial G}{\partial n}(M_i, M') dM' - J(M_j) \int_{P_j}^{P_{j+1}} G(M_i, M') dM' \right\}. \quad (15)$$

En simplifiant les notations, l'équation intégrale discrétisée (15) relie linéairement les valeurs discrètes du potentiel aux valeurs discrètes de la densité de courant par

$$\frac{1}{2}V_i = H_{ij}V_j + G_{ij}J_j, \quad (16)$$

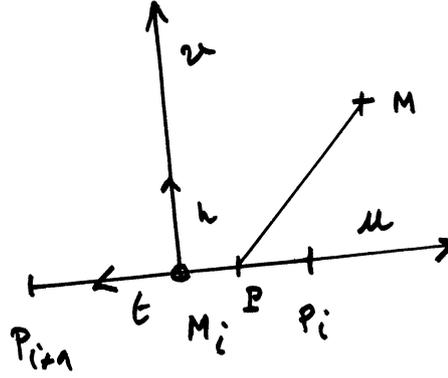
où,

$$V_i = V(M_i) \quad \text{et} \quad J_i = \frac{\partial V}{\partial n}(M_i), \quad (17)$$

et les coefficients d'influence  $G$  et  $H$  sont définis par,

$$G_{ij} \triangleq \int_{P_j}^{P_{j+1}} G(M_i, P) dP, \quad (18)$$

$$H_{ij} \triangleq \int_{P_j}^{P_{j+1}} \nabla_P G(M_i, P) \cdot \mathbf{n}_j dP. \quad (19)$$



**Figure 4 :** Définition de la base locale de l'élément. La tangente  $\mathbf{t}$  à l'élément est orientée par la numérotation des points. La normale est déduite de la tangente par rotation de  $-\pi/2$ . La normale étant extérieure au domaine, la numérotation des points définit le domaine de résolution.

On trouvera une description détaillée de la mise en oeuvre des techniques de calcul des coefficients d'influence pour l'équation de Laplace dans les trois ouvrages cités en début de paragraphe. L'accent est mis également dans ces ouvrages sur les discrétisations d'ordre plus élevé de l'équation 13 où l'intégration doit nécessairement être exécuté numériquement.

Cependant pour nombre de calculs pratiques, la discrétisation la plus élémentaire suffit et il ne faut pas négliger l'existence d'intégration analytiques totales ou partielles des coefficients d'influence. En particulier, en 3D, Hess & Smith (1967) et Ramachandran (1994) rappellent l'existence de ces solutions et les premiers auteurs proposent de plus une méthode de calcul de coefficients 3D axisymétriques de précision contrôlée. Outre l'amélioration de la précision, ces expressions simplifient le calcul des intégrales singulières ( $i = j$ ). De plus, l'effort de calcul est allégé. Pour un problème plan, les coefficients  $G$  et  $H$ , s'obtiennent simplement dans la base locale de l'élément (figure 4), centrée sur le milieu de l'élément,  $M_j$ , et dont les vecteurs de base sont colinéaires respectivement à  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$ . En notant que l'élément est de longueur  $d$  et que dans la base de l'élément  $\Delta_j$ , le point de collocation  $M_i$  a pour coordonnées,

$$\begin{aligned} x &= -\mathbf{M}_j \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{t}, \\ y &= \mathbf{M}_j \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (20)$$

On a alors simplement, en notant,

$$x_1 = x - \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = x + \frac{d}{2}, \quad (21)$$

$$G_{ij} = \frac{-1}{4\pi} \left[ x_1 \ln(x_1^2 + y^2) - x_2 \ln(x_2^2 + y^2) + 2y \left( \tan^{-1} \frac{x_1}{y} - \tan^{-1} \frac{x_2}{y} \right) + 2d \right] \quad \text{pour } i \neq j, \quad (22)$$

$$G_{ii} = \frac{1}{4\pi} \left[ d \ln \frac{d^2}{4} - 2d \right]. \quad (23)$$

Le calcul de  $H$  s'effectue aussi simplement et donne,

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left[ \tan^{-1} \frac{x_1}{y} - \tan^{-1} \frac{x_2}{y} \right]. \quad (24)$$

On remarque qu'on ne peut pas évaluer  $H$  sur la droite qui supporte l'élément  $\Delta_j$ . Cette situation arrive fréquemment lorsque la frontière comporte une partie rectiligne. On peut pallier ce

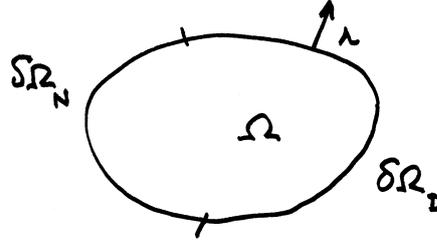


Figure 5 : Domaine de définition du problème mixte.

défaut en regroupant les deux arctangentes de (24),

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y(x_1 - x_2)}{x_1 x_2 + y^2}, \quad (25)$$

où l'on évalue l'arctangente en tenant compte des signes respectifs du numérateur et du dénominateur. La nouvelle expression n'est singulière que sur les extrémité des éléments. Cet inconvénient est également présent pour le calcul des coefficients tridimensionnels donné par exemple par Hess & Smith (1967).

## 2.2 Problème mixte pour l'équation de Laplace 2D

Considérons un problème mixte de Laplace à résoudre sur le domaine décrit schématiquement à la figure 5. La frontière du domaine  $\partial\Omega$  forme une partition  $\partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$  où, sur chaque partie, sont imposées respectivement soit une condition de Neumann soit une condition de Dirichlet. Le problème se pose selon les termes suivants,

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= 0 & x \in \Omega, \\ V &= V_S & x \in \Omega_D, \\ \frac{\partial V}{\partial N} &= j_S & x \in \Omega_N. \end{aligned} \quad (26)$$

On peut résoudre ce problème avec la même méthode que le problème de Dirichlet de la section 2.1. La formulation est identique à celle qui conduit à l'équation 13. La discrétisation de cette équation conduit comme précédemment à un problème analogue à l'équation 16. En introduisant les notations analogues à celles de Brebbia & Dominguez (1989), on peut écrire la relation entre les valeurs des flux et celles de la fonction aux frontières du domaine.

$$G_{ij} J_j = H'_{ij} V_j, \quad (27)$$

où on a défini,

$$H'_{ij} = H_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (28)$$

Sachant que sur chaque partie de la frontière une des deux valeurs seulement est connue, on peut, par une numérotation appropriée des éléments, réécrire (27) comme,

$$\begin{pmatrix} G_{DD} & G_{DN} \\ G_{ND} & G_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_D \\ J_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_{DD} & H'_{DN} \\ H'_{ND} & H'_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_D \\ V_N \end{pmatrix}. \quad (29)$$

En regroupant les inconnues et les données dans des vecteurs séparés on obtient la formulation discrétisée du problème mixte,

$$\begin{pmatrix} G_{DD} & -H'_{DN} \\ G_{ND} & -H'_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_D \\ V_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_{DD} & -G_{DN} \\ H'_{ND} & -G_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_D \\ J_N \end{pmatrix}. \quad (30)$$

La seule différence avec le problème de Dirichlet réside dans l'échange du rôle des inconnues et des données pour la partie de la frontière où sont imposées les conditions de Neumann.

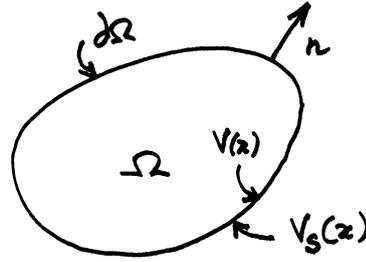


Figure 6 : Problème de Laplace avec un impédance d'interface.

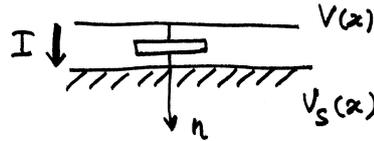


Figure 7 : Modélisation macroscopique de l'impédance d'interface.

### 2.3 Modélisation des impédances d'interface

La manifestation principale de l'impédance d'interface réside dans le fait que le potentiel imposé effectivement au milieu  $V(\mathbf{x})$  est différent du potentiel porté par les électrodes  $V_S(\mathbf{x})$ . Ce phénomène, localisé au voisinage immédiat de l'interface entre l'électrode et le milieu, résulte de la dynamique des réactions de transfert de charge entre le métal des électrodes et les ions de la solution. On peut modéliser cet effet macroscopiquement par une impédance linéaire. Pour l'unité d'aire d'interface on aura,

$$V_S - V = ZI, \quad (31)$$

où  $Z$  est l'impédance d'interface et  $I$  le courant traversant l'unité d'aire d'électrode. Ce courant s'exprime en fonction du gradient normal du potentiel par,

$$I = \sigma S \frac{\partial V}{\partial n}, \quad (32)$$

où  $\sigma$  est la conductivité électrique du milieu et  $S$ , l'aire de la portion d'électrode considérée. On constate expérimentalement que l'impédance d'interface est de type parallèle et est donc une fonction décroissante de la surface de l'électrode. Ainsi on a,

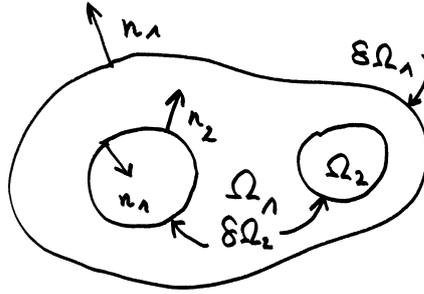
$$ZS = \text{cste} = Z', \quad (33)$$

où l'impédance surfacique est constante et ne dépend essentiellement que de la fréquence du courant d'excitation. La condition aux limites, pour toute partie de la frontière portant des électrodes est donc,

$$V_S(\mathbf{x}) - V = \sigma Z' \frac{\partial V}{\partial n} \quad (34)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure au domaine. C'est une condition mixte qu'il est simple de prendre en compte par la méthode des éléments de frontière. En effet, en éliminant  $V$  dans la formulation intégrale (13) en utilisant la condition (34) et en discrétisant comme précédemment, on obtient,

$$G_{ij}J_j = H'_{ij}(V_{Sj} - \sigma_j Z' J_j). \quad (35)$$



**Figure 8 :** Définition des domaines dans le cas d'un problème non simplement connexe.

Ce problème linéaire a le même degré de difficulté que les précédents. Il s'écrit,

$$G''_{ij} J_j = H''_{ij} V_{sj}, \quad (36)$$

où l'on a simplement,

$$\begin{cases} G''_{ij} &= G'_{ij} + \sigma_j Z'_j H'_{ij}, \\ H''_{ij} &= H'_{ij}. \end{cases} \quad (37)$$

Il est remarquable de noter que cette technique se transpose directement aux conditions de flux convectif pour un problème de conduction. Ces dernières s'écrivent,

$$\Phi = h(T - T_{amb}) \quad (38)$$

où  $T_{amb}$  est la température du fluide de refroidissement,  $T$  est la température de surface et  $h$  est le coefficient d'échange thermique. Sachant que le flux conductif s'écrit d'après le loi de Fourier comme,

$$\phi = -k \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (39)$$

où  $k$  est la conductivité thermique. On obtient la condition mixte pour les problèmes de thermique analogue à la condition d'impédance d'interface,

$$T = T_{amb}(\mathbf{x}) - \frac{h}{k} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (40)$$

## 2.4 Problèmes sur des domaines non simplement connexes

Pour la simplicité de l'exposé, on se limitera au traitement d'un problème comprenant un ensemble de domaines  $\Omega_2$  inclus dans un domaine  $\Omega_1$  les englobant complètement. De plus on ne traitera que le problème de Dirichlet, toutes les variantes déjà exposées pouvant simplement et directement se transposer à ce problème. En notant bien que la normale à chaque domaine est toujours orientée vers l'extérieur du domaine considéré, l'application des relations intégrales (8) et (13) à chaque domaine donne,

$$\int_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} V_1 \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \frac{\partial V_1}{\partial n_1} dS = \begin{cases} V_1 & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \frac{1}{2} V_1 & \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \\ 0 & \mathbf{x} \notin \bar{\Omega}_1 \end{cases} \quad (41)$$

$$\int_{\partial\Omega_2} V_2 \frac{\partial G}{\partial n_2} - G \frac{\partial V_2}{\partial n_2} dS = \begin{cases} V_2 & \mathbf{x} \in \Omega_2 \\ \frac{1}{2} V_2 & \mathbf{x} \in \partial\Omega_2 \\ 0 & \mathbf{x} \notin \bar{\Omega}_2 \end{cases} \quad (42)$$

On peut éliminer le potentiel des problèmes intérieurs si on utilise les conditions de continuité du potentiel et de la densité de courant aux interfaces ( $\partial\Omega_2$ ) et en tenant compte de la condition aux limites de Dirichlet sur  $\partial\Omega_1$ . Elles s'énoncent,

$$V = V_S \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \quad (43)$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = V_2 \\ \sigma_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = 0 \end{array} \right\} \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_2 \quad (44)$$

En effectuant la combinaison linéaire des équations (41) multipliée par  $\sigma_1$  et (42) multipliée par  $\sigma_2$ , on obtient,

$$\int_{\partial\Omega_1} \left( V_1 \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \frac{\partial V_1}{\partial n_1} \right) dS + \left( 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \int_{\partial\Omega_2} V_1 \frac{\partial G}{\partial n_1} dS = \begin{cases} \frac{1}{2} V_1 & x \in \partial\Omega_1 \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) V_1 & x \in \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (45)$$

Cette équation intégrale présente le même niveau de difficulté qu'un problème de Dirichlet sur le domaine  $\Omega_1$ . On remarque d'ailleurs que si les inclusions sont isolantes, (45) s'identifie directement avec le problème de Dirichlet (14).

## 2.5 Optimisation d'un capteur densitométrique capacitif

Un capteur à impédance doit mesurer le taux de présence de phases moyenné dans la section. Il consiste principalement en une série d'électrodes entourant la conduite où la mesure doit être effectuée. Un capteur de géométrie quelconque comme celui décrit à la figure 9 est à la fois sensible au taux de vide et à sa distribution. Le taux de vide surfacique est défini par,

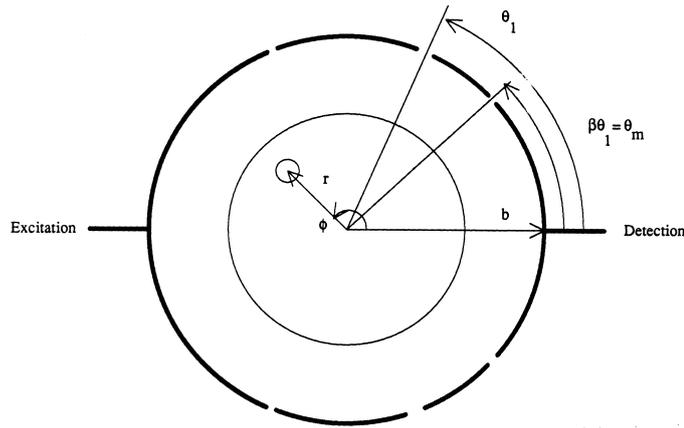
$$\alpha = \frac{A_G}{A} \quad (46)$$

où  $\alpha$  est le taux de vide,  $A_G$  est l'aire de la section droite de la conduite occupée par le gaz et  $A$  est l'aire de la section droite de la conduite. La méthode intégrale aux frontières peut être utilisée pour simuler le fonctionnement d'un capteur de taux de vide. Les équations intégrales peuvent être résolues par développement sur une base de fonctions comme dans la méthode de Seager & Bates (1985) ou bien résolues par la méthode des éléments de frontière. Il ne faut pas négliger que la théorie des fonction complexes fournit des solutions analytiques même pour des problèmes mixtes non triviaux (Peytraud, 1995, Lemonnier *et al.*, 1991).

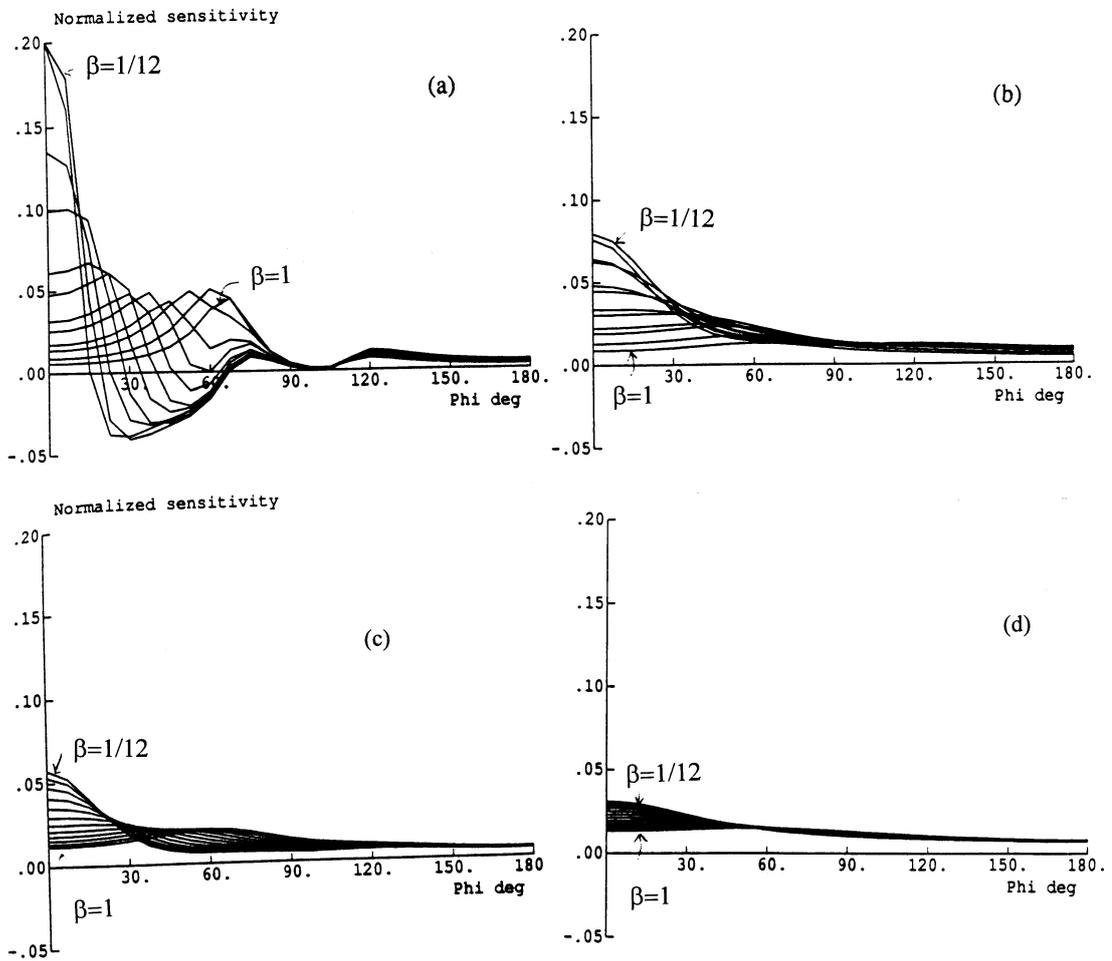
L'optimisation de la géométrie du capteur a pour objectif final de minimiser la sensibilité de la mesure d'impédance à la distribution des phases par un choix approprié

- de l'épaisseur de la chemise éloignant les électrodes de la paroi intérieure du tube,
- de la taille des électrode d'excitation et de détection,  $\theta_1$ ,
- de la fraction,  $m$ , de l'électrode de mesure utilisée pour la détection (le reste servant de garde).

La figure 10 montre que le signal induit par la présence d'une inclusion dépend énormément de sa position si les électrodes sont choisies arbitrairement et le chemisage est inexistant. En revanche, lorsque le chemisage possède une épaisseur d'environ un rayon de conduite et que les électrodes ont une taille appropriée, la sensibilité de l'appareil à une inclusion est à peu près indépendante de la position.

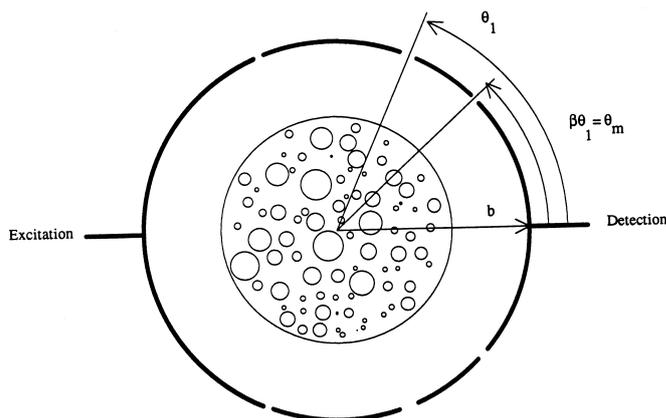


**Figure 9 :** Schéma d'une sonde capacitive comportant une chemisage diélectrique intérieur de rayon  $b$ . L'échelle de longueur est le rayon de la conduite (cercle intérieur).  $\beta$  est la fraction angulaire de l'électrode utilisée pour la mesure. Le reste sert de garde. La position de l'inclusion est déterminée par  $r < 1$  et  $\phi$ .



**Figure 10 :** Réponse de la sonde pleine de liquide ( $\epsilon = 2,25$ ,  $\theta_1 = 67,5^\circ$ ) à la présence d'une inclusion de gaz ( $\epsilon = 1$ ) de rayon 0,1 (taux de vide 1%) en fonction de sa position angulaire dans la sonde. A gauche,  $r = 0,8$ , à droite  $r = 0,5$ , en haut pas de chemisage,  $b = 1$ , en bas chemisage ( $\epsilon = 4$ ) présent  $b = 1,4$ .

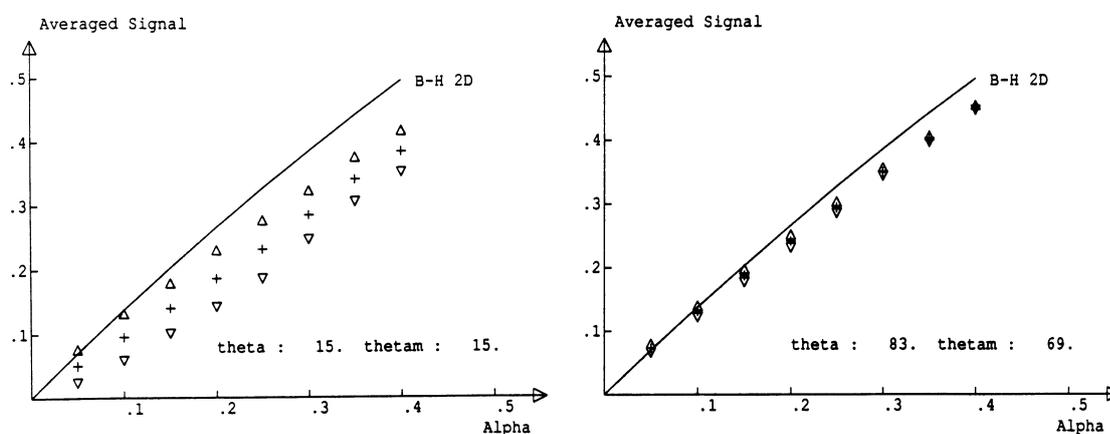
Une autre méthode peut être utilisée pour s'assurer que la méthode de la particule test donne un optimum raisonnable pour des valeurs de taux de vide significatives, c'est-à-dire, dans le cas



**Figure 11 :** Illustration de la configuration de calcul permettant l'étude statistique des effets de distribution.

d'un grand nombre d'inclusions. Dans ce dernier cas on simule la réponse de la sonde pour plusieurs, typiquement ici 200, distributions des phases de même taux de vide mais de répartition différente (figure 11).

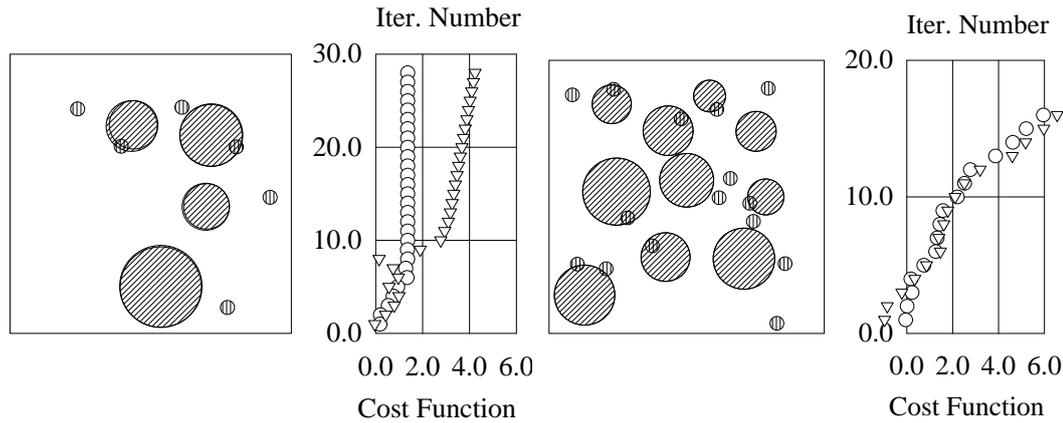
Pour chaque valeur du taux de vide, on effectue une statistique sommaire des résultats : moyenne et écart type. La figure 12 montre nettement que pour des conditions analogues à celles de la figure 10, la dispersion statistique des différents signaux peut être minimale pour certaines configuration d'électrodes et d'épaisseur de chemisage diélectrique. L'avantage supplémentaire de cette technique d'optimisation est de fournir une estimation de l'incertitude de mesure, directement liée à la dispersion des résultats dus aux effets de distribution.



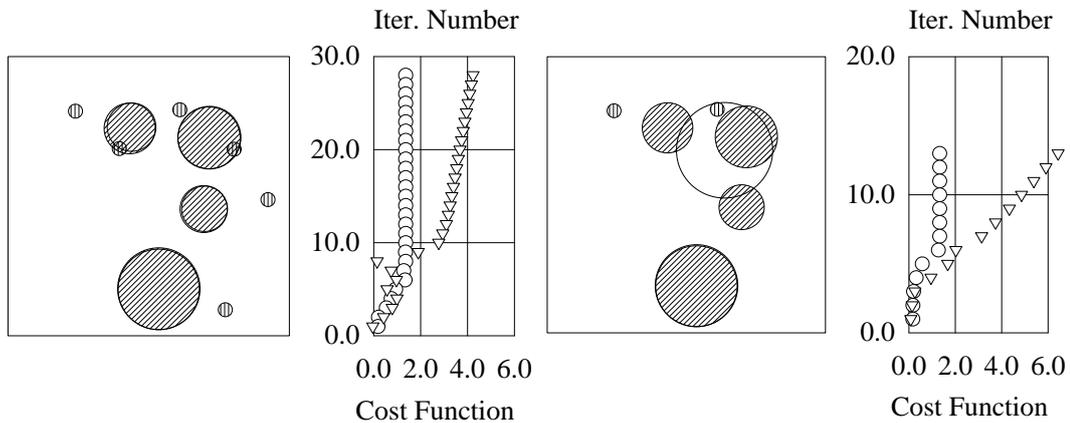
**Figure 12 :** Réponse du capteur à la distribution de taux de vide (chemisage,  $b = 1,4$ ,  $\epsilon = 4$ ). Les croix représentent la moyenne statistique et les triangles sont séparés de 2 écarts types et donnent une indication de la dispersion statistique. (a) petites électrodes de mesure,  $\theta_m = 15^\circ$ ,  $\beta = 1$ , (b) optimum obtenu :  $\theta_m = 82,5^\circ$  et  $\beta = 10/12$ . En trait plein l'approximation de Bruggeman-Hanaï bidimensionnelle.

## 2.6 Un problème inverse : la tomographie d'impédance

Le problème de la reconstruction tomographique est un problème inverse qui se formule à partir du problème direct de la conduction électrique dans un milieu non homogène ( $\Omega$ ). En raison de la loi d'Ohm et de la conservation du courant, le potentiel électrique satisfait le problème de Dirichlet suivant,



**Figure 13 :** Exemples de reconstructions tomographiques. Inclusions à reconstruire : hachures obliques, inclusions de départ pour la reconstruction : hachures verticales, milieu reconstruit : ligne continue. Les cercles représentent le cologarithme de la norme de la différence entre les données et la réponse électrique du milieu. Les triangles représentent le cologarithme de la norme des corrections des paramètres du milieu. 16 électrodes d'excitation, A gauche reconstruction avec un bruit relatif de  $5.10^{-3}$  sur les données. A droite reconstruction d'un lieu contenant 10 inclusions avec 15 inclusions au démarrage.



**Figure 14 :** Reconstruction réussie de données bruitées à gauche et reconstruction incorrecte de données idéales à droite. La fonction objectif atteint le même seuil après convergence dans les deux cas. Aucun critère objectif ne permet ici de discriminer les deux situations ni de déterminer la plus vraisemblable. Pour la signification des symboles voir le légende de la figure 13.

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega, \text{ et } V = V_S, x \in \partial\Omega, \quad (47)$$

où  $V_S$  est le potentiel excitant le milieu. La résolution de ce problème aux limites fournit la densité de courant  $j$  qui ne dépend que de la distribution de conductivité du milieu. Soit  $\Lambda$ , l'opérateur linéaire permettant de calculer la densité de courant à la frontière résultant de l'application du potentiel  $V_S$ ,

$$\Lambda(\sigma) : V_S \longrightarrow j \quad (48)$$

L'opérateur  $\Lambda$  caractérise entièrement le comportement électrique du milieu et le problème de la tomographie électrique consiste simplement à déterminer  $\sigma$  connaissant  $\Lambda(\sigma)$ .

Peytraud (1995) conclut de l'analyse des travaux existants que le mauvais conditionnement du problème direct mis en évidence par de nombreuses études numériques et analytiques impose de contraindre la solution et d'exploiter l'ensemble des informations disponibles : en particulier, les écoulements diphasiques isothermes ont des propriétés électriques uniformes par morceau. Ces

constatations conduisent naturellement à schématiser le milieu par un ensemble d'inclusions circulaires plongées dans un milieu continu.

Dans le cadre de ces contraintes, le potentiel est harmonique dans les inclusions et dans le milieu continu qui les englobe. Le problème direct a donc naturellement été résolu par une méthode d'éléments de frontière.

Le problème inverse exprimé comme un problème d'optimisation non linéaire nécessite le calcul de la sensibilité de la réponse électrique aux variations du domaine. Lemonnier & Peytraud (1996) ont montré en utilisant une technique de perturbation régulière que ces sensibilités sont solutions d'un problème aux limites possédant les mêmes caractéristiques que le problème direct. Les sensibilités sont donc implicitement contenues dans la solution du problème direct. Ainsi est-il inutile de les estimer par différences finies ce qui aurait nécessité de résoudre autant de problèmes directs voisins du problème initial qu'il y a de paramètres pour décrire le milieu.

Des expériences numériques ont montré que l'algorithme mis au point pouvait reconstituer des données bruitées de façon satisfaisante ainsi que des situations comportant un nombre d'inclusions proche du maximum théorique. Quelques exemples sont donnés aux figures 13 et 14. La convergence des itérations et en particulier la grande sensibilité des résultats aux conditions initiales a été résolue en régularisant l'opérateur d'itération de façon adaptative par une décomposition en valeurs singulières. Ce point est mentionné par Lemonnier & Peytraud (1998).

## 2.7 Analyse de la stabilité d'une interface

Canot (1989) a traité deux problèmes d'écoulement à surface libre par la méthode des éléments de frontière. La première application est la modélisation de la formation et de l'échappement d'une bulle à la sortie d'un orifice circulaire plongé sous une lame d'eau d'épaisseur donnée. Canot montre que ce problème instationnaire peut être résolu par une méthode d'avancement en temps où, à chaque pas de temps, le potentiel des vitesses satisfait un problème de Dirichlet. Les bilans aux interfaces fournissent à chaque pas de temps les déplacements de l'interface et les valeurs du potentiel sur la frontière pour le pas de temps suivant.

Ce problème aux limites est axisymétrique et le calcul des coefficients d'influence est effectué selon la procédure décrite par Hess & Smith (1967). Les éléments considérés sont des troncs de cônes et l'intégration azimutale peut être exécutée analytiquement tandis que l'intégration selon la méridienne est exécutée numériquement.

Une intégration de Gauss suffit en général mais un développement est nécessaire pour calculer le terme d'autoinfluence. Hess & Smith (1967) proposent pour certains noyaux particuliers de l'équation de Laplace une procédure que l'on peut adapter pour toutes les équations intégrales résolues sur des géométries axisymétriques. Il faut noter que certains auteurs comme Brebbia & Dominguez (1989) ou Bonnet (1995) recommandent plutôt des formules de quadrature numériques spécialisées pour des intégrales faiblement singulières.

L'exemple suivant illustre la technique de développement de Hess & Smith (1967). Soit  $r$  et  $z$  les coordonnées du point de collocation sur la méridienne du contour et  $r'$  et  $z'$  les coordonnées du point courant sur l'élément. Les coefficients d'influence de l'équation de Laplace, après intégration selon la direction azimutale s'écrivent,

$$-4\pi G_{ij} = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{4r'K(k)}{\sqrt{(z-z')^2 + (r+r')^2}} ds \quad (49)$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne le long de la méridienne,  $K$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce et  $k$  est son module dont la valeur est,

$$k^2 = \frac{4rr'}{(z - z')^2 + (r + r')^2} \quad (50)$$

Lors du calcul de l'autoinfluence ( $i = j$ ), le module  $k$  tend vers 1 et l'intégrande n'est plus borné. Sur un segment donné de la méridienne dont le point de collocation est le centre et de pente est  $\alpha$ , on a,

$$\begin{aligned} r &= r' + s \sin \alpha \\ z &= z' + s \cos \alpha \end{aligned} \quad (51)$$

En substituant ces expressions dans les définitions des coefficients (49) et (50), on fait apparaître un petit paramètre  $u$  défini par,

$$u \triangleq \frac{s}{r} \quad (52)$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne dont l'origine est placée au centre de l'élément. Toutes les expressions,  $k$ ,  $K$  se développent en fonction de ce petit paramètre. On obtient en fin de compte,

$$\begin{aligned} -4\pi \frac{dG_{ij}}{du} &= 2r \left( \frac{1}{2}u \sin \alpha + \frac{1}{16}u^2 + O(u^3) \right. \\ &\quad \left. + \ln\left(\frac{u}{8}\right) \left( -1 - \frac{1}{2}u \sin \alpha + \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \sin^2 \alpha \right) u^2 + O(u^3) \right) \right) \end{aligned} \quad (53)$$

Au centre de l'élément,  $u$  tend vers 0, l'intégrande n'est donc pas borné. La singularité n'étant que logarithmique, elle est évidemment intégrable et on obtient,

$$\begin{aligned} -4\pi G_{ij} &= 2r \left( 2v + \left( \frac{1}{36} - \frac{1}{36} \sin^2 \alpha \right) v^3 + O(v^5) \right. \\ &\quad \left. + \ln\left(\frac{v}{8}\right) \left( -2v + \left( \frac{1}{24} + \frac{1}{12} \sin^2 \alpha \right) v^3 + O(v^5) \right) \right) \end{aligned} \quad (54)$$

où le paramètre  $v$  se déduit de la longueur de l'élément  $d$  par,

$$v \triangleq \frac{d}{2r} \quad (55)$$

La précision numérique du résultat dépend de l'ordre de troncature des développements. Ainsi Hess & Smith (1967), limitant leurs développements à trois termes, ne peuvent pas assurer une précision suffisante sur les parties des domaines proches de l'axe où  $v$  n'est pas nécessairement très petit devant 1. Les trois premiers termes de (53) peuvent s'obtenir sans trop de risque d'erreur mais la symétrie de l'intervalle d'intégration nécessitant deux termes supplémentaires à chaque nouveau terme dans (54), il est fortement recommandé d'utiliser un outil de calcul formel.

La figure 15 donne un exemple de simulation de la formation d'une bulle sur un orifice circulaire. Le calcul permet de déterminer la période de bullage, déterminée par le pincement de l'interface, ainsi que le volume à l'instant du détachement.

La figure 16, donne un exemple de simulation de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, d'après Canot (1989) par une technique analogue à celle utilisée pour la simulation du bullage. On remarque que des formes très réalistes d'interface peuvent être décrites. On imagine difficilement l'utilisation d'une méthode d'éléments finis pour décrire ce problème dont l'interface a pour vocation de s'enrouler indéfiniment. Le fait de n'avoir qu'une seule interface à traiter permet dans chacun de ces deux cas de mettre en oeuvre un remaillage périodique de l'interface afin de suivre fidèlement l'étirement de l'interface.

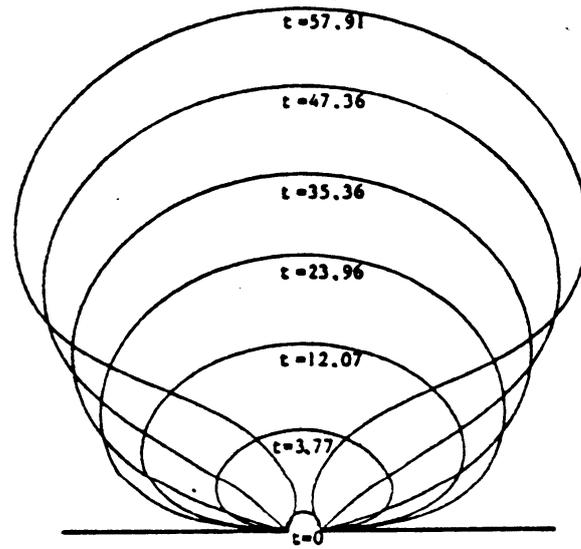


Figure 15 : Simulation du bullage selon Canot (1989)

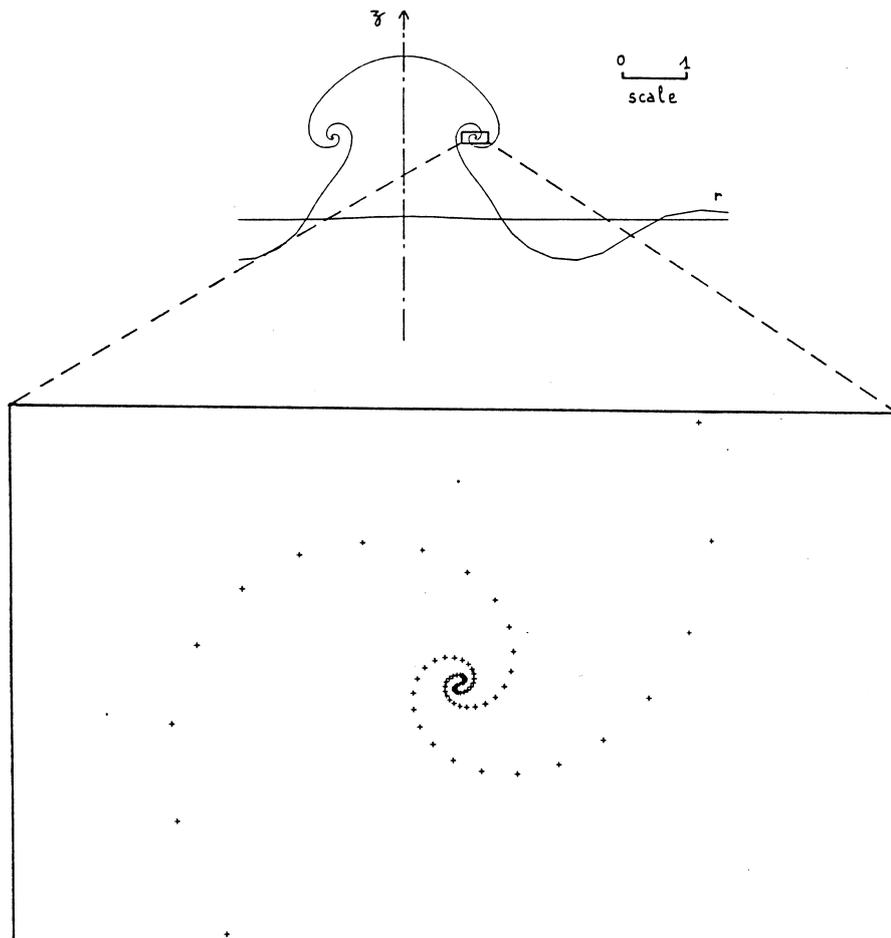


Figure 16 : Instabilité de Rayleigh Taylor axisymétrique simulée par la méthode des éléments de frontière, d'après Canot (1989). Détail du maillage.

### 3 La méthode des singularités pour les écoulements potentiels

#### 3.1 Equation intégrale pour la vitesse

L'approche présentée jusqu'à présent est représentative des formulations directes d'une méthode des équations intégrales. Elle est caractéristique des problèmes électromagnétiques. La formulation indirecte, une fois discrétisée, produit également un système linéaire. Elle s'appuie sur la possibilité d'adjoindre, lorsque ce dernier est non essentiel, un problème intérieur auxiliaire  $V_i$  au problème extérieur  $V_e$  que l'on cherche à résoudre. En combinant les identités (8) et (13) écrites d'une part pour le domaine intérieur et d'autre part pour le domaine extérieur on obtient,

$$\int_{\partial\Omega} (V_i - V_e) \frac{\partial G}{\partial n} dS - \int_{\partial\Omega} G \left( \frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n} \right) dS = \begin{cases} V_i(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{1}{2} V_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} V_e(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ V_e(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \notin \bar{\Omega} \end{cases} \quad (56)$$

où les indices  $i$  et  $e$  se rapportent respectivement au domaine intérieur ( $\Omega$ ) et à son extérieur et où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à ( $\Omega$ ). La combinaison appropriée d'un problème intérieur et d'un problème extérieur est une technique répandue qui permet, en outre, par application de conditions *ah hoc* sur  $\partial\Omega$ , d'éliminer le problème intérieur quand il ne participe pas explicitement au problème physique. C'est un avantage indiscutable des méthodes des équations intégrales dont on profite lors du calcul de la distribution de potentiel d'un milieu contenant des inclusions. Dans d'autres cas, le problème extérieur nous est totalement indifférent, on peut alors le choisir de façon à simplifier la formulation, c'est-à-dire faire disparaître une des deux intégrales dans l'équation (56) ce qui permet d'amenuiser l'effort numérique. En choisissant par exemple un champ extérieur ou auxiliaire tel que,

$$V_e = V_i \quad (57)$$

on obtient une formulation typiquement utilisée pour la solution de certains problèmes hydrodynamiques,

$$\int_{\partial\Omega} G\sigma(\mathbf{x}') dS = V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad (58)$$

où  $\sigma$  est la fonction inconnue, une distribution de simple couche ainsi nommée par analogie au potentiel électrique engendré par une distribution de charge surfacique. La résolution du problème de Dirichlet et le calcul du champ intérieur ne sont alors obtenus qu'avec une seule évaluation d'intégrale. D'autres critères peuvent procéder à la détermination implicite du champ intérieur. Ils peuvent être d'origine numérique et viser, par exemple, à minimiser l'erreur de troncature du schéma numérique (Hunt & Semple, 1980). Cette formulation est employée pour la résolution de certains problèmes inverses de mécanique des fluides (écoulement avec cavitation).

Les écoulements potentiels autour d'obstacles donnent souvent lieu à des problèmes de Neumann, car c'est le plus souvent la composante de la vitesse normale à  $\Omega$  qui est imposée. En prenant le gradient de l'équation 56, on montre que le champ de vitesse,  $\mathbf{v}$ , est engendré par une distribution de sources,

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x}') \nabla G dS = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{x} \notin \partial\Omega \quad (59)$$

L'écriture de la condition aux limites de Neumann permet d'obtenir l'équation de Fredholm de seconde espèce dont est déduite la distribution de sources. Compte tenu de la discontinuité de

l'intégrale au passage de la frontière  $\partial\Omega$ , on obtient une formulation qui s'apparente en deux dimensions à celle obtenue par la théorie des fonctions analytiques :

$$\frac{1}{2}\sigma(\mathbf{x}) + \mathbf{n} \cdot \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x}') \nabla G dS' = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (60)$$

Lemonnier & Rowe (1988) ont utilisé une formulation intégrale transposable à des calculs d'hélice (tridimensionnels) ou d'écoulement axial autour d'objets présentant une symétrie de révolution. La méthode retenue est basée sur la formulation indirecte (56) où le problème auxiliaire reste non défini. Le champ de vitesse est alors engendré par une distribution de simple couche et une distribution de double couche. En utilisant l'équivalence, des doublets normaux potentiels et des vortex potentiels (perpendiculaires au plan ou en anneau ou boucle pour les écoulements axisymétriques), on montre que le champ de vitesse est engendré par une distribution de sources,  $\sigma$ , et de vortex,  $\gamma$ . L'analogie avec l'électromagnétisme est frappante,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_\infty + \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x}') \nabla G dS' + \int_{\partial\Omega} \mathbf{k} \gamma(\mathbf{x}') \times \nabla G dS' \quad (61)$$

où le vecteur  $\mathbf{k}$  unitaire est soit normal au plan de l'écoulement bidimensionnel soit dirigé selon la direction azimutale dans le cas axisymétrique. L'avantage de ces deux types de distributions particulières est de jouer des rôles analogues vis-à-vis des conditions de vitesse normales et de vitesse tangentielles (pression). Dans chaque cas on aboutit à une équation de Fredholm de deuxième espèce pour la répartition de singularité correspondante.

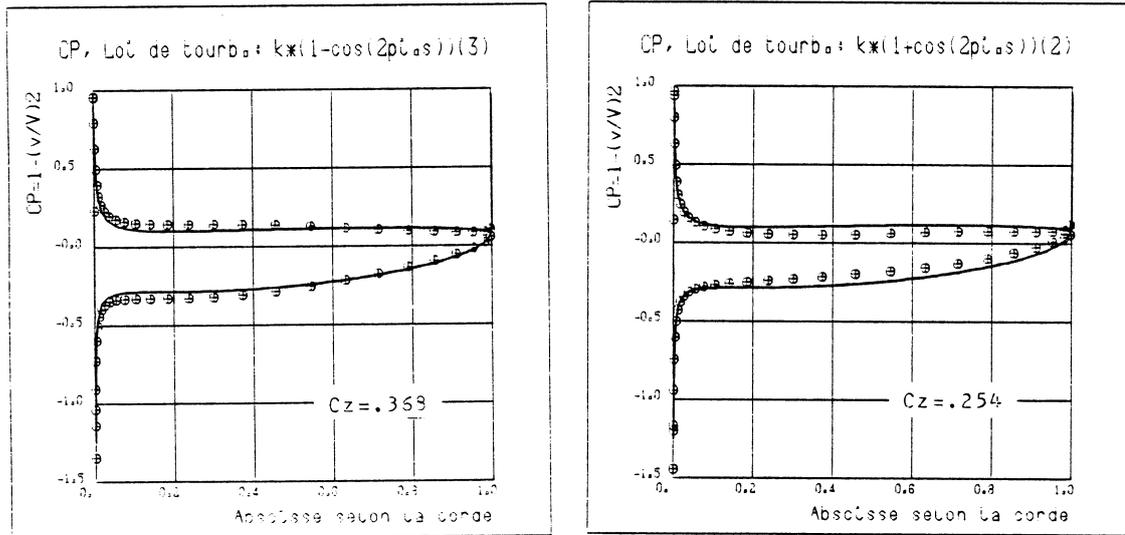
Il convient de rappeler que ces distributions ne sont pas uniques car elles correspondent à un problème auxiliaire arbitraire. Elles sont en revanche équivalentes mathématiquement, c'est-à-dire qu'elles engendrent toujours le même champ de vitesse dans le domaine principal. Ce n'est plus le cas lorsque les équations sont discrétisées. Des exemples simples (figure 17) montrent que la distribution de pression, à maillage donné, est sensible au choix de la distribution de tourbillons  $\gamma$ , et qu'en particulier certaines sont meilleures que d'autres. En particulier, l'une des meilleures est la distribution uniforme de tourbillons sur  $\partial\Omega$  (figure 18). La valeur de la constante est obtenue en ajoutant aux  $n$  équations de collocation la condition de Joukowski exprimant le non contournement du bord de fuite du profil. Cette condition ferme le système et permet de calculer la portance.

### 3.2 Minimisation des erreurs numériques

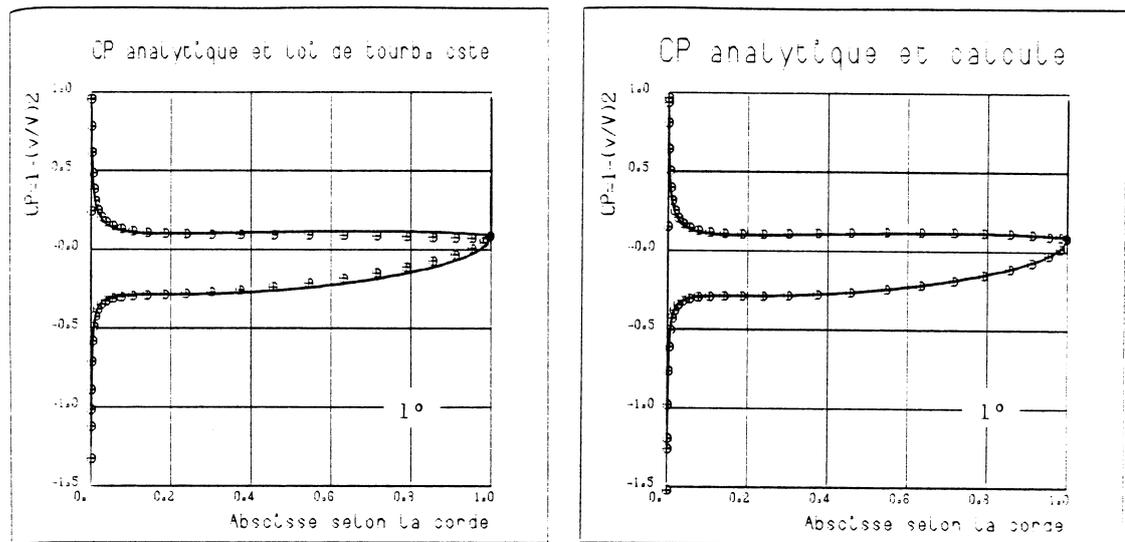
Une analyse du comportement local des intégrales (61) montre que l'influence immédiate des distributions de singularités en un point du profil, sur un élément d'arc de longueur  $d$ , s'exprime par,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s(\mathbf{x}) &= -4d\sigma'(\mathbf{x})\mathbf{t} + \left(2\pi + \frac{2d}{R(\mathbf{x})}\right) \sigma(\mathbf{x})\mathbf{n} \\ \mathbf{v}_t(\mathbf{x}) &= \left(2\pi + \frac{2d}{R(\mathbf{x})}\right) \gamma(\mathbf{x})\mathbf{t} + 4d\gamma'(\mathbf{x})\mathbf{t} \end{aligned} \quad (62)$$

où  $R$  est le rayon de courbure de l'arc, la dérivation s'effectue selon l'abscisse curviligne et les indices  $s$  et  $t$  se rapportent respectivement aux sources (resp. tourbillons) c'est-à-dire à la première (resp. deuxième) intégrale de l'équation 61. L'équation 62 montre que les sources engendrent principalement en champ de vitesse normal à l'élément alors que les tourbillons le font dans le plan tangent. Il y a cependant un effet proportionnel à la variation des singularités qui se manifeste dans la direction orthogonale à la direction principale. Les termes du premier ordre en  $d$  représentent en fait la partie principale de l'erreur de discrétisation. La *minimisation* de ces termes permet de fermer le problème de l'écoulement sans cavitation et fournit la distribution de tourbillons qui



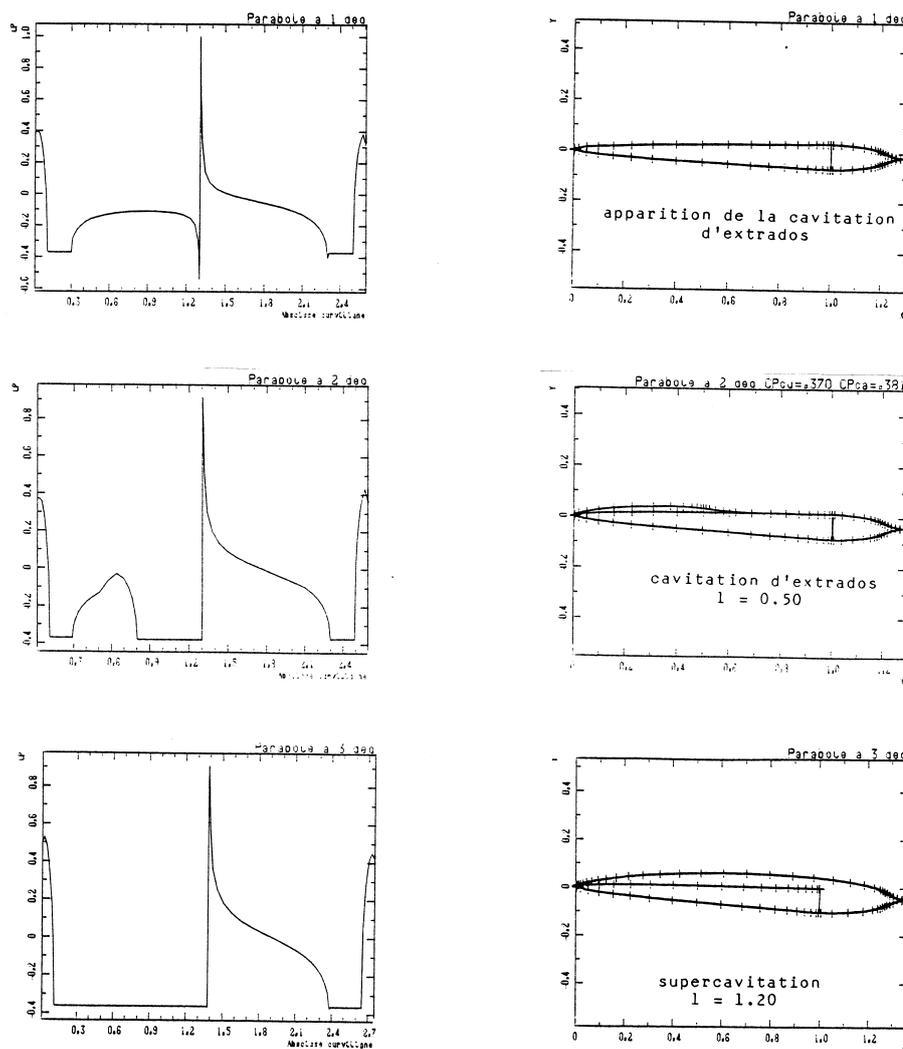
**Figure 17 :** Comparaison du coefficient de pression calculé sur un profil fin (2,5% d'épaisseur relative) par la méthode intégrale,  $\oplus$ , et une solution analytique obtenue par transformation conforme (trait continu). A droite, tourbillon plutôt concentré sur l'avant, à gauche tourbillon plutôt concentré vers l'arrière.  $C_z$  est le coefficient de portance calculé. La solution analytique est



**Figure 18 :** Comparaison du coefficient de pression calculé sur un profil fin (2,5% d'épaisseur relative) par la méthode intégrale,  $\oplus$ , et une solution analytique obtenue par transformation conforme (trait continu). A droite, tourbillon constant, c'est à dire le modèle le plus répandu et à gauche tourbillon calculé par la méthode de minimisation.  $C_z$  est le coefficient de portance calculé par cette méthode est obtenu à 1% près.

assure *a priori* la meilleure précision (figure 18).

La mise en oeuvre pratique est simple et procède en deux temps. Des procédures de maillage ont été développées pour minimiser l'erreur d'origine géométrique qui est d'ailleurs proportionnelle à l'angle que font deux éléments successifs entre eux (Lemonnier, 1984). Puis dans un deuxième temps, il s'agit de minimiser le produit du gradient des singularités par la taille de l'élément soit, au premier ordre, les différences entre les valeurs successives des singularités d'un



**Figure 19 :** Evolution de la cavitation sur un profil plan parabolique de 10% d'épaisseur relative, pour des incidences croissantes : 1, 2 et 3°. A gauche, formes des poches, à droite profils de pression en fonction de l'abscisse curviligne, le long du profil dans le sens trigonométrique direct.

élément à l'autre. On définit un vecteur erreur  $\mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{E} \triangleq (\sigma_2 - \sigma_1, \sigma_3 - \sigma_2, \dots, \sigma_n - \sigma_{n-1}, \gamma_2 - \gamma_1, \gamma_3 - \gamma_2, \dots, \gamma_n - \gamma_{n-1}) \quad (63)$$

qui s'exprime linéairement par rapport aux inconnues discrètes du problème, les  $2n$  valeurs des sources  $\sigma_i$ , et des tourbillons  $\gamma_i$ , regroupées dans un vecteur  $\mathbf{x}$ . Tous les problèmes ainsi discrétisés sont de simples problèmes de minimisation sous contraintes que l'on résout simplement par élimination.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{L} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{H}\mathbf{x}, \|\mathbf{E}\| \text{ minimum.} \end{aligned} \quad (64)$$

### 3.3 Ecoulements potentiels avec cavitation

La méthode retenue permet de résoudre une grande diversité de problèmes inverses comme par exemple celui de la détermination de la forme des poches de cavitation. Les poches de cavitation sont considérées comme des zones à pression constante inconnue. On se donne, une estimation

initiale de la forme de la poche et en particulier un point de détachement et un point de recollement sur le profil. Les équations de collocation utilisées sont des conditions d'imperméabilité sur la partie mouillée du profil (vitesse normale) et des conditions de pression (vitesse tangente) sur la partie cavitante. Tant que le problème n'a pas convergé, la cavité est une ligne à pression constante mais pas encore une ligne de courant. Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est la nullité du débit à travers cette surface. Cette condition, qui s'exprime linéairement vis-à-vis des valeurs discrètes des inconnues est ajoutée aux conditions de collocation et à la condition de Joukowski. Les équations de minimisation ferment le problème.

A l'issue d'une itération de ce calcul, on obtient la ligne de courant qui part du point de détachement et qui nécessairement se referme au point de recollement par une simple intégration du champ de vitesse. La nouvelle forme sert à nouveau d'estimation jusqu'à ce qu'elle devienne effectivement une ligne de courant à pression constante. Il faut entre 5 et 10 itérations pour obtenir une solution stable. Un exemple de calcul bidimensionnel avec une ou plusieurs poches de cavitation est présenté à la figure 19. Les plateaux visibles sur les profils de pression correspondent aux cavités (Lemonnier, 1984).

La robustesse de l'algorithme permet également de calculer des écoulements axisymétriques verticaux où la gravité est significative. On montre alors (Lemonnier & Rowe, 1988) que la condition de pression devient d'autant plus non linéaire que les vitesses sont faibles ce qui n'empêche pas l'algorithme de converger, les conditions non-linéaires se vérifiant progressivement au cours des itérations. Une validation par des données expérimentales obtenues sur un prototype a montré la qualité du modèle.

## 4 La méthode des éléments de frontière pour l'équation de Stokes

### 4.1 Equation intégrale pour le champ de vitesse

Les écoulements à faible nombre de Reynolds sont également décrits par des équations linéaires. Les champs de vitesse et de pression satisfont les bilans locaux de masse et de quantité de mouvement qui à la suite d'un choix d'échelles appropriées, et dans l'hypothèse d'écoulement stationnaire s'expriment par :

$$\nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p = 0, x \in \Omega \quad (65)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, x \in \Omega \quad (66)$$

où  $\mathbf{v}$  est le champ de vitesse et  $p$  est le champ de pression. Il est possible ici d'obtenir une solution fondamentale des équations de Stokes et de transformer ce système différentiel en une relation intégrale. Cette théorie est due à Ladyzhenskaya (1969) puis fut rendue populaire par l'article de Youngren & Acrivos (1975), YA dans ce qui suit. La solution fondamentale satisfait les équations suivantes,

$$\nabla^2 \mathbf{u}_k - \nabla q_k = \mathbf{e}_k \delta(x - y), \mathbf{x} \in \Omega \quad (67)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_k = 0, \mathbf{x} \in \Omega \quad (68)$$

et des conditions aux limites homogènes à l'infini. Elle se déduit aisément de la fonction de Green de l'équation de Laplace par dérivation et intégration,

$$q_k = \frac{-1}{4\pi} \frac{(x_k - y_k)}{r^3}, \quad u_{ik} = \frac{-1}{8\pi} \left( \frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{r^3} \right) \quad (69)$$

où  $r$  est la distance entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . La solution fondamentale représente le champ de vitesse  $\mathbf{u}_k$  et de pression  $q_k$  induit par une force ponctuelle unité, de direction  $\mathbf{e}_k$  appliquée en  $\mathbf{y}$ . On obtient une formulation intégrale analogue à l'identité de Green pour l'équation de Laplace en procédant de la même façon que pour l'établissement de cette dernière. On multiplie l'équation (67) par  $\mathbf{v}$  et l'équation (65) par  $\mathbf{u}_k$  puis après avoir soustrait on intègre sur le domaine  $\Omega$  (figure 1) pour obtenir pour toute valeurs de  $k$ ,

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbb{T}(\mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n} \, dS_y - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_k \cdot \mathbb{T}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dS_y = \begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ 0, & \mathbf{x} \notin \overline{\Omega} \end{cases} \quad (70)$$

où  $\mathbb{T}$  est le tenseur des contraintes déduit du champ de vitesse et de pression par,

$$T_{ij}(\mathbf{v}) \triangleq -\delta_{ij}p + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (71)$$

Finalement on obtient la formulation intégrale finale en remplaçant dans (70) la solution fondamentale par sa valeur (69). Puis, en explicitant les composantes du résultat on obtient,

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} K_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y})v_j(\mathbf{y})n_k(\mathbf{y}) \, dS_y - \int_{\partial\Omega} J_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y})f_j(\mathbf{y}) \, dS_y = \begin{cases} \mathbf{v}_i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{1}{2}\mathbf{v}_i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ 0, & \mathbf{x} \notin \overline{\Omega} \end{cases}} \quad (72)$$

où  $f_j = n_i T_{ij}(\mathbf{v})$  est la contrainte normale appliquée au fluide par la frontière,  $J_{ij}$  est le stokeslet (simple couche) déjà défini à l'équation (69) et  $K_{ijk}$  est la distribution de double couche,

$$K_{ijk} \triangleq T_{ij}(\mathbf{u}_k) = \frac{-4}{3\pi} \left( \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{r^5} \right) \quad (73)$$

L'équation (70) représente la formulation directe des écoulements visqueux et permet, comme les équations (8) et (13) pour l'équation de Laplace, de résoudre le problème de Dirichlet (vitesse connue sur la frontière, contraintes normales à déterminer) ou le problème de Neumann (contraintes connues sur la frontière, vitesse à déterminer). Dans le premier cas, on obtient une équation de Fredholm de première espèce dont la solution est déterminée à  $\lambda \mathbf{n}$  près (où  $\lambda$  est simplement la constante arbitraire avec laquelle la pression est déterminée), tandis que pour le problème de Neumann on obtient une équation de Fredholm de deuxième espèce dont la solution est unique.

Les méthodes appliquées à l'équation de Laplace sont entièrement transposables aux problèmes de Stokes. En particulier, la formulation indirecte des problèmes de Stokes s'obtient en adjoignant un problème auxiliaire arbitraire au problème intérieur. Ainsi, en choisissant bien le champ auxiliaire, on peut engendrer le champ de vitesse à l'aide d'une seule distribution de simple ou de double couche. De même pour un problème à deux fluides possédant des frontières libres, on peut également éliminer l'un des deux domaines à l'aide des bilans de masse et de quantité de mouvement aux interfaces.

La méthode des éléments de frontière permet également la résolution numérique des équations intégrales (70). La seule différence avec l'équation de Laplace étant le caractère vectoriel des inconnues. Sur chaque élément, il y a deux inconnues vectorielles soit six inconnues scalaires au lieu de 2 et, en chaque point de collocation, on a une relation intégrale vectorielle soit 3 relations

scalaires au lieu d'une. Les coefficients d'influence s'obtiennent exactement par les mêmes techniques que pour l'équation de Laplace et notamment pour les problèmes axisymétriques. L'effort de calcul est cependant singulièrement accru puisque le nombre d'intégrales singulières à calculer passe de 3 pour l'équation de Laplace à 9 pour les équations de Stokes ce qui justifie pleinement le recours au calcul formel. Pozrikidis (1992) détaille la formulation générale et la mise en oeuvre pratique de cette méthode.

La première mise en oeuvre de la technique a consisté à déterminer les contraintes induites par l'écoulement d'un fluide visqueux sur un corps axisymétrique, comme l'avaient fait YA. La formulation directe aboutit à une équation de Fredholm de première espèce pour les contraintes. Cette technique produit un système linéaire discrétisé non inversible ce que n'avaient apparemment pas observé YA. En effet la pression n'apparaissant que par son gradient dans (65), la solution de l'équation intégrale n'est définie qu'à une constante près pour la pression,  $p_0$ . Les contraintes sont donc calculées à  $-p_0\mathbf{n}$  près. Il faut explicitement projeter (au sens des fonctions) l'équation intégrale orthogonalement à son noyau ( $\mathbf{n}$ ) pour obtenir une solution numérique. On peut, soit supprimer une équation de collocation, qui de toute façon est redondante puisque le système est non inversible, et la remplacer par une équation qui sélectionne  $p_0$ , soit, tout simplement, éliminer numériquement le noyau de l'opérateur linéaire par décomposition en valeurs singulières (Press *et al.*, 1992). Les solutions ainsi obtenues se confondent avec les résultats de YA et les solutions analytiques de ces problèmes. Cette apparente différence avec les travaux de YA n'était pas injustifiée puisqu'elle a, en fait, suscité de ces auteurs, la rédaction d'un corrigendum un an plus tard (peu convainquant d'ailleurs). Cela démontre de plus que notre procédure numérique est de bonne qualité.

D'autres auteurs comme Martinez (1989) ou Tullock (1993) ont mis en oeuvre ces méthodes en 3D axisymétrique ou non. Leur technique est basée sur une intégration numérique des coefficients d'influence. Rocchi Tavares (1992) a utilisé la méthode du développement de Hess & Smith (1967) et traité de plus des problèmes axisymétriques possédant un plan de symétrie en utilisant la solution fondamentale de Blake (1971).

## 4.2 Problème de Dirichlet pour la vitesse

La précision numérique des évaluations des équations intégrales est confirmée par Sabry & Lemonnier (1995) qui ont résolu un problème de Dirichlet et un problème mixte sur l'intérieur d'un cylindre. Ces solutions numériques sont comparées à des solutions analytiques obtenues par séparation des variables et par d'autres techniques d'équations intégrales (Sabry, 1984). Cette étude a permis de valider le modèle numérique de Stokes axisymétrique et en particulier montre l'excellent comportement de la méthode des éléments de frontière au voisinage des singularités géométriques. Par exemple, le problème de Dirichlet s'écrit,

$$\int_{\partial\Omega} J_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y})f_j(\mathbf{y}) dS_y = \int_{\partial\Omega} K_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y})v_j(\mathbf{y})n_k(\mathbf{y}) dS_y - \frac{1}{2}v_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (74)$$

où la vitesse est connue et les contraintes inconnues. La discrétisation de l'équation 74 par une méthode de collocation conduit à la résolution d'un système linéaire entièrement analogue à ceux obtenus pour l'équation de Laplace (16) et (27),

$$J_{ij}^{lm}f_j^m = \frac{1}{2}v_i^l - K_{ijk}^{lm}n_k^m u_j^m \quad (75)$$

où les indices  $i, j$  et  $k$  prennent la valeur 1 dans la direction axiale, et 2 dans la direction radiale et les indices  $l$  et  $m$  varient entre 1 et  $n$ , le nombre d'éléments sur la méridienne du domaine. Les problèmes mixtes se traitent comme pour l'équation de Laplace.

### 4.3 La déformation des masses fluides en mouvement

Lorsque deux milieux sont en mouvement, par exemple lorsqu'une masse liquide, comme une goutte, se déplace en se déformant sous son propre poids dans un autre liquide, dans l'hypothèse des faibles vitesses, les écoulements intérieurs et extérieurs à la goutte satisfont les équations de Stokes. Si on décide de nommer,  $\Omega_1$ , le domaine extérieur et,  $\Omega_2$ , le domaine intérieur et,  $\mathbf{n}$ , la normale à l'inclusion dirigée vers l'extérieur de la goutte, les équations de Stokes dans chaque phase doivent être satisfaites avec les bilans de masse et de quantité de mouvement aux interfaces. En absence de changement de phase, le bilan de masse et la condition d'adhérence imposent,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_S, \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (76)$$

où  $\mathbf{v}_S$  est la vitesse commune des fluides à l'interface. Le bilan de quantité de mouvement à l'interface relie les contraintes normales et la tension de surface par,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbb{T}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbb{T}_1 = -\sigma \mathbf{n} \cdot \nabla_S \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n}(\rho_1 - \rho_2)gz, \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (77)$$

où  $\sigma$  est le coefficient de tension superficielle,  $\rho$  est la masse volumique et  $g$  est l'intensité de la pesanteur. On notera que lorsque la forme de la goutte est connue, le membre de droite de l'équation (77) est connu.

La suite de la formulation est identique à celle expliquée au paragraphe 2.4 pour l'équation de Laplace. On effectue une combinaison linéaire des équations intégrales écrites sur la surface pour chaque domaine. Puis en utilisant les bilans aux interfaces, on obtient une équation de Fredholm de deuxième espèce pour la vitesse sur la surface,

$$\frac{1}{2}v_{Sj}(\mathbf{x}) - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \int_{\partial\Omega} \partial\Omega K_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v_{Si}(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) dS_y = -\frac{1}{\lambda + 1} \int_{\partial\Omega} J_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta f_j(\mathbf{y}) dS_y, \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (78)$$

où  $\lambda$  est le rapport des viscosités  $\mu_2/\mu_1$ , et l'excès de contrainte,  $\Delta f$ , est déduit du bilan de quantité de mouvement et est donné par,

$$\Delta f = -\frac{\mathbf{n}}{Ca} \nabla_S \cdot \mathbf{n} - \frac{3}{2} \frac{2 + 3\lambda}{1 + \lambda} \mathbf{n}z \quad (79)$$

où  $Ca$  est le nombre de capillarité basé sur l'échelle de vitesse du problème : la vitesse d'Hadamard du globule sphérique de même volume, dont le rayon est  $R_S$ . Ce nombre et la vitesse sont données par,

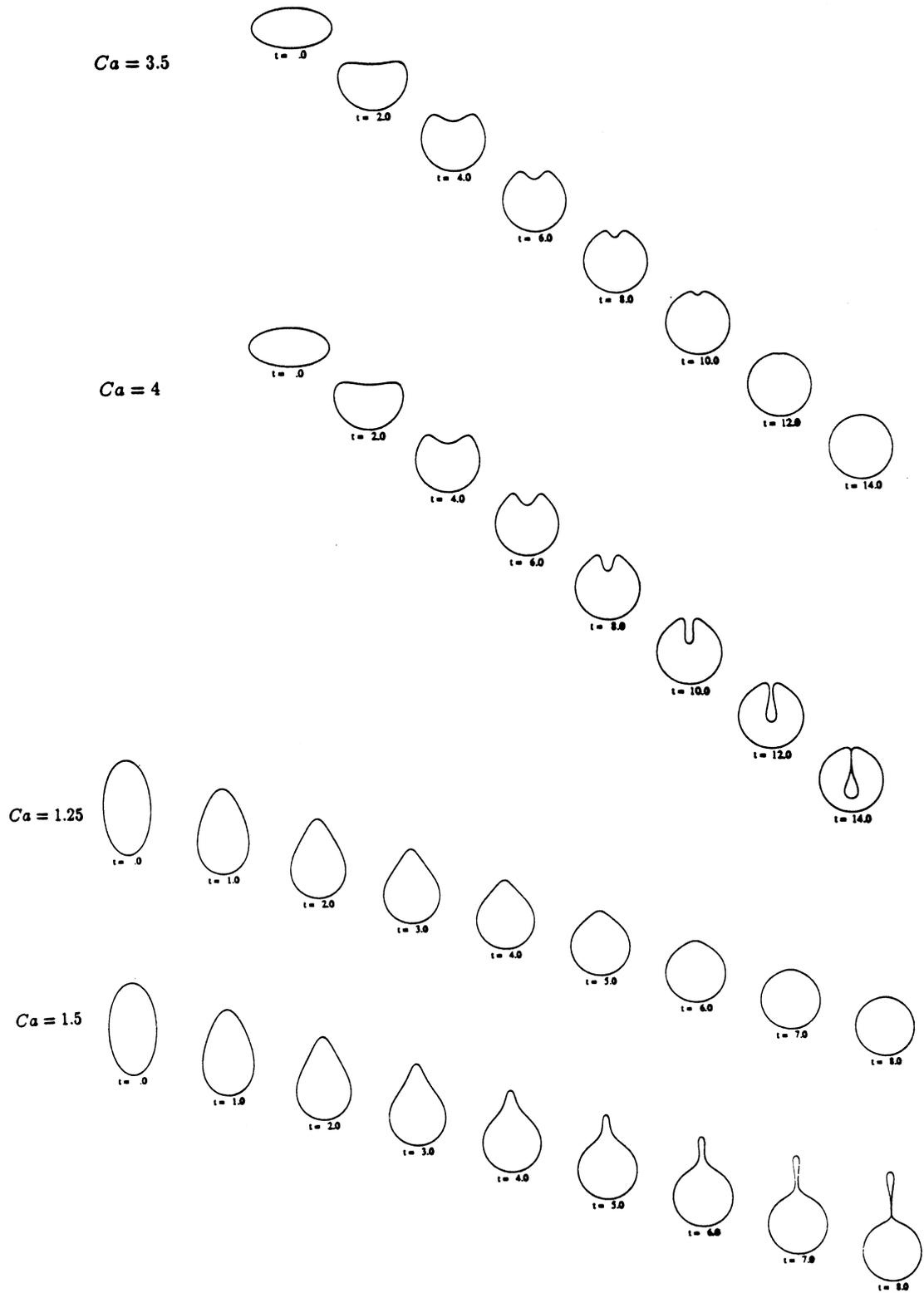
$$U = \frac{2}{3} \frac{R_S^2 g}{\nu_1} \left| \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \right| \frac{1 + \lambda}{2 + 3\lambda} \quad (80)$$

$$Ca = \frac{\mu_1 U}{\sigma}$$

En se donnant une forme initiale, il est possible de calculer la vitesse du fluide à la surface en résolvant (78). En utilisant la condition cinématique (déduite des bilans de masse), on obtient le déplacement des points de l'interface :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{n}v_S \cdot \mathbf{n} \quad (81)$$

Cette dernière équation permet de calculer l'évolution de la forme et d'avancer en temps. La figure 20 donne un exemple de calcul de la déformation d'une goutte d'huile de ricin tombant dans de l'huile de silicone. Une comparaison avec des données expérimentale, portant notamment sur la détermination du nombre de capillarité critique contrôlant la stabilité de la forme sphérique a été présentée par Hervieu *et al.* (1992).



**Figure 20 :** Evolution d'une forme d'interface pour une goutte visqueuse tombant dans un liquide autre liquide visqueux, d'après Hervieu *et al.* (1992)

## 5 La méthode des éléments de frontière pour l'équation de diffusion

Certains problèmes inverses sont mal conditionnés, c'est le cas notamment de la reconstitution du flux de chaleur sur une paroi inaccessible. Dans ce type de situation, il faut reconstruire des conditions aux limites sur une partie de la frontière du domaine tandis que sur l'autre partie on dispose en général d'une condition aux limites surnuméraire. D'autres problèmes inverses sont couramment résolus. Alifanov (1994) en propose une classification et avec Beck *et al.* (1985, 1992) passent en revue les différentes techniques de résolution et de régularisation de ces problèmes. Les avantages de précision et de simplicité des méthodes d'éléments de frontière en font une méthode de choix pour la résolution des problèmes inverses (Ingham & Yuan, 1994).

Le traitement de la reconstitution du flux de chaleur sur une paroi inaccessible est encore, même dans des situations bidimensionnelles, un sujet en intense développement. Des travaux récents ont été publiés par exemple par Pasquetti & Petit (1995) et Han *et al.* (1995). Le problème inverse repose sur la résolution d'un problème direct auquel est associé une méthode d'identification qu'il faudra régulariser. L'exposé qui suit est limité à la mise en oeuvre de la procédure de calcul direct et fait de larges emprunts à Lagier (1996).

### 5.1 Equation intégrale pour le champ de température instationnaire

La formulation intégrale de la diffusion de la chaleur résulte directement du caractère linéaire de l'équation de diffusion de la chaleur,

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + g \quad (82)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du milieu,  $c$  est la chaleur spécifique à pression constante,  $k$  est la conductivité thermique et  $g$  est la distribution de sources volumiques. Lorsque la conductivité thermique ne dépend que de la température, on obtient une équation dans le cas stationnaire et presque linéaire dans le cas instationnaire en effectuant le changement de variable suivant (transformée de Kirchhoff) :

$$\phi(T) = \int_{T_0}^T k(T) dT \quad (83)$$

où  $T_0$  est une température de référence définie arbitrairement. L'équation de diffusion en absence de source de chaleur devient,

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla^2 \phi \quad (84)$$

où  $\alpha$  est la diffusivité thermique du matériau définie par,

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \quad (85)$$

Dans certains cas, la diffusivité thermique a une moindre sensibilité à la température que la conductivité thermique et (84) représente un modèle très acceptable.

Comme dans les chapitres précédents, la formulation intégrale repose sur l'existence d'une solution particulière à l'équation de diffusion : la fonction de Green de l'opérateur de diffusion. La fonction de Green instationnaire au point  $\mathbf{x}'$  et à l'instant  $t_F$  associée à l'équation de la chaleur

instationnaire est solution de,

$$\Delta G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | t, t_F) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | t, t_F) + \frac{1}{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t_F) = 0 \quad (86)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | t, t_F)| = 0 \quad (87)$$

où  $\mathbf{x}$  est le point d'observation et  $\mathbf{x}'$  est le point source et  $t$  est l'instant d'observation et  $t_F$  est l'instant où la source est activée. Cette fonction de Green est connue et s'écrit analytiquement (Morse & Feshbach, 1953),

$$G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | t, t_F) = \frac{1}{(4\pi\alpha\tau)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha\tau}\right) H(\tau) \quad (88)$$

où  $r$  est la distance entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$ ,  $\tau$  est l'intervalle de temps entre  $t$  et  $t_F$  ( $\tau = t_F - t$ ),  $d$  est la dimension d'espace du problème et  $H(\tau)$  est la fonction de Heaviside définie par,

$$H(\tau) = \begin{cases} 1, & t \leq t_F \\ 0, & t > t_F \end{cases} \quad (89)$$

$G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | t, t_F)$  correspond à la distribution de température créée par une source ponctuelle et impulsionnelle d'intensité  $1/\alpha$ , à la différence près que l'échelle des temps est inversée. Ramachandran (1994) montre que la fonction de Green est solution du problème adjoint à celui de l'équation de la chaleur instationnaire, ce qui explique l'origine de cette inversion de l'échelle des temps.

La formulation intégrale s'obtient en appliquant la deuxième formule de Green aux fonctions  $\phi$  et  $G_t$  définies précédemment, puis en intégrant temporellement entre l'origine des temps  $t_0$  et  $t_F$  l'instant de résolution,

$$\frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}', t_F) + \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\partial\Omega} \alpha \phi \frac{\partial G_t}{\partial n} d\partial\Omega = \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\partial\Omega} \alpha G_t \frac{\partial \phi}{\partial n} d\partial\Omega + \int_{\Omega} \phi(t_0) G_t(t_0) d\Omega \quad (90)$$

La présence d'une intégrale de volume liée aux conditions initiales fait perdre une partie de son attrait à la méthode intégrale. Toutefois, Le Niliot (1991) montre qu'il est possible de l'éliminer dans les cas suivants : (1) état initial uniforme, (2) état initial solution d'un problème de conduction stationnaire. Dans ces deux derniers cas, l'équation (90) relie les valeurs de la température et du flux sur la frontière par :

$$\frac{1}{2} \phi(\mathbf{x}', t_F) + \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\partial\Omega} \alpha \phi \frac{\partial G_t}{\partial n} d\partial\Omega = \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\partial\Omega} \alpha G_t \frac{\partial \phi}{\partial n} d\partial\Omega, \forall x \in \delta\Omega \quad (91)$$

## 5.2 Méthode des éléments de frontière pour le champ de température instationnaire

La méthode des éléments de frontière repose sur l'utilisation de la formulation intégrale (91), puis sa discrétisation dans l'espace et le temps. Pour l'équation de diffusion, en plus de l'intégration spatiale, il faut s'intéresser à l'intégration temporelle. En s'inspirant de la méthode de collocation déjà utilisée pour l'équation de Laplace, on divise l'intervalle de temps  $[t_0, t_F]$  en  $F$  sous-intervalles  $[t_{f-1}, t_f]$ , ( $f = 1, \dots, F$ ).

Le choix de la discrétisation temporelle donne lieu à de nombreuses variantes. Le Niliot (1991) choisit de faire varier linéairement la température sur un pas de temps. Cette interpolation par un

polynôme d'ordre 1 suppose un plus grand effort de calcul par rapport au schéma d'ordre 0 que Lagier (1996) a retenu dans un souci de simplicité : sur chacun des intervalles de temps, il suppose que les grandeurs  $\phi$  et  $\partial\phi/\partial n$  sont constantes et uniformes sur chaque élément et égales à  $\phi(t_f)$  et  $\partial\phi/\partial n(t_f)$  respectivement.

La présence d'une intégrale de volume liée aux conditions initiales dans l'équation intégrale instationnaire (90) amène Le Niliot (1991) à considérer deux approches pour la résolution de cette équation.

(i) Une *première méthode* consiste à prendre pour instant initial l'instant  $t_0$ , et cela, quel que soit l'instant de résolution  $t_F$ . L'intégrale de volume peut alors s'éliminer dans les cas décrits au paragraphe précédent, et il ne reste plus que des intégrales de surface à calculer.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}_i, t_F) + \sum_{f=1}^F \sum_j \phi(\mathbf{x}_j, t_f) \left( \int_{t_{f-1}}^{t_f} dt \int_{\partial\Omega_j} \alpha \frac{\partial G_t}{\partial n} d\partial\Omega_j \right) = \\ \sum_{f=1}^F \sum_j \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x}_j, t_f) \left( \int_{t_{f-1}}^{t_f} dt \int_{\partial\Omega_j} \alpha G_t d\partial\Omega_j \right) + \int_{\Omega} \phi(t_0) G_t(t_0) d\Omega \end{aligned} \quad (92)$$

Soit encore, en adoptant les notations,

$$\phi(x_i, t_f) = \phi_{i,f} \quad (93)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}(x_i, t_f) = q_{i,f} \quad (94)$$

il vient,

$$\frac{1}{2}\phi_{i,F} + \sum_{f=1}^F \sum_j H_{ij,Ff} \phi_{j,f} = \sum_{f=1}^F \sum_j G_{ij,Ff} q_{j,f} + \int_{\Omega} \phi(t_0) G_t(t_0) d\Omega \quad (95)$$

où  $H_{ij,Ff}$  et  $G_{ij,Ff}$  sont les coefficients d'influence définis par,

$$H_{ij,Ff} = \int_{t_{f-1}}^{t_f} dt \int_{\partial\Omega_j} \left( \alpha \frac{\partial G_t(x, x_i | t, t_F)}{\partial n} \right) d(\partial\Omega_j) \quad (96)$$

$$G_{ij,Ff} = \int_{t_{f-1}}^{t_f} dt \int_{\partial\Omega_j} (\alpha G_t(x, x_i | t, t_F)) d(\partial\Omega_j) \quad (97)$$

On résout alors une équation intégrale en  $\phi$  et  $\partial\phi/\partial n$  à chaque instant de résolution  $t_F$ , les valeurs de  $\phi$  et  $\partial\phi/\partial n$  étant connues jusqu'à l'instant  $t_{F-1}$ . Le volume de calcul augmente donc avec le nombre de pas de temps considérés.

(ii) La *deuxième méthode* consiste à prendre, comme instant initial, l'instant précédant l'instant de résolution. A chaque instant, on obtient l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}_i, t_F) + \sum_j \left( \int_{t_{F-1}}^{t_F} dt \int_{\partial\Omega_j} \alpha \frac{\partial G_t}{\partial n} d\partial\Omega_j \right) \phi(\mathbf{x}_j, t_F) = \\ \sum_j \left( \int_{t_{F-1}}^{t_F} dt \int_{\partial\Omega_j} \alpha G_t d\partial\Omega_j \right) \frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{x}_j, t_F) + \int_{\Omega} \phi(t_{F-1}) G_t(t_{F-1}) d\Omega \end{aligned} \quad (98)$$

L'avantage de cette méthode réside dans la diminution du nombre de coefficients d'influence à calculer, mais en contrepartie, il faut calculer une intégrale de volume à chaque pas de temps, ce qui fait perdre une partie de l'attrait de la méthode des éléments de frontière.

Le calcul pratique des coefficients  $G$  et  $H$  n'est pas reproduit ici, par souci de compacité. Les techniques utilisées couramment sont des intégrations numériques par poids et points de Gauss (Le Niliot, 1991). Il faut encore noter qu'en géométrie bidimensionnelle, il existe des expressions analytiques de ces coefficients. En 2D, Lagier (1996) en fournit l'expression analytique et montre que les changements de variables utilisés pour l'équation de Laplace (Hess & Smith, 1967) sont également utiles pour réduire à une seule les intégrations numériques en 3D (Lagier, 1999).

### 5.3 Mise en oeuvre pratique

A l'instant de résolution  $t_F$ , l'équation intégrale discrétisée (95) s'écrit,

$$\left(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{H}_{FF}\right) \cdot \phi_F + \sum_{f=1}^{F-1} \mathbb{H}_{Ff} \cdot \phi_f = \mathbb{G}_{FF} \cdot q_F + \sum_{f=1}^{F-1} \mathbb{G}_{Ff} \cdot \mathbf{q}_f \quad (99)$$

où  $\mathbb{I}$  est la matrice identité,  $\mathbb{H}_{Ff}$  et  $\mathbb{G}_{Ff}$  sont les matrices des coefficients d'influence  $G_{ij,Ff}$  et  $H_{ij,Ff}$ , et  $\phi_f$  et  $\mathbf{q}_f$  sont les vecteurs formés par les valeurs discrètes de la transformée de Kirchhoff et de sa dérivée normale à l'instant  $t_F$ .

La résolution du système linéaire associé à (99) est grandement facilitée lorsque l'on constate que dès que le pas de temps est constant, on a l'égalité suivante, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$G_{ij,(F+n)(f+n)} = G_{ij,Ff}. \quad (100)$$

Cette propriété résulte simplement de la dépendance en temps de la fonction de Green (88) par l'intermédiaire de  $\tau = t_F - t$  seulement. Cette égalité implique qu'à chaque instant de résolution, la plupart des coefficients de l'équation (99) ont déjà été calculés aux instants précédents. En effet, à l'instant de résolution  $t_1$ , (99) devient :

$$\left(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{H}_{11}\right) \cdot \phi_1 = \mathbb{G}_{11} \cdot q_1. \quad (101)$$

On a une première série de coefficients d'influence à calculer, les matrices  $\mathbb{G}_{11}$  et  $\mathbb{H}_{11}$  correspondant à l'intervalle de temps  $[t_0, t_1]$ . A l'instant de résolution suivant, (99) s'écrit :

$$\left(\frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{H}_{22}\right) \cdot \phi_2 + \mathbb{H}_{12} \cdot \phi_1 = \mathbb{G}_{22} \cdot q_2 + \mathbb{G}_{12} \cdot q_1. \quad (102)$$

Nous avons alors deux séries de coefficients à calculer, correspondant respectivement aux pas de temps  $[t_0, t_1]$  et  $[t_1, t_2]$ . L'égalité (100) traduit simplement le fait qu'à l'instant de résolution  $t_2$ , les coefficients relatifs au pas de temps  $[t_1, t_2]$  sont égaux aux coefficients calculés à l'instant de résolution  $t_1$  et relatifs au pas de temps  $[t_0, t_1]$ . Matriciellement, (97) s'écrit,

$$\mathbb{G}_{11} = \mathbb{G}_{22} \quad (103)$$

A chaque instant de résolution, il ne reste qu'une seule matrice de coefficients à calculer, et donc pour  $n$  instants de résolution, il n'y aura que  $n$  matrices à calculer au lieu de  $n(n+1)/2$  lorsque les pas de temps sont quelconques. La figure 21 schématise les différentes égalités relatives à l'équation 100.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{H}_{11} & & & & & & \\ \mathbb{H}_{21} & \frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{H}_{11} & & & & & \\ \mathbb{H}_{31} & \mathbb{H}_{21} & \frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{H}_{11} & & & & \\ \mathbb{H}_{41} & \mathbb{H}_{31} & \mathbb{H}_{21} & \frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{H}_{11} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{H}_{11} & & \\ \mathbb{H}_{n1} & \mathbb{H}_{(n-1)1} & \mathbb{H}_{(n-2)1} & \dots & \dots & \frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{H}_{11} & \end{pmatrix}$$

**Figure 21** : Représentation de la structure du système linéaire (99) permettant d'évaluer le volume de calcul effectif en fonction de l'instant de résolution.

De plus, on peut remarquer que dans le cadre de la résolution du système linéaire associé à l'équation intégrale discrétisée (99), la matrice à inverser est toujours la même quelle que soit l'instant de résolution, seuls les seconds membres changent.

Prenons l'exemple d'un problème de Dirichlet où la température est connue sur la frontière, le système linéaire à résoudre à l'instant  $t_F$  s'écrit,

$$\mathbb{G}_{FF} \cdot q_F = - \sum_{f=1}^{F-1} \mathbb{G}_{Ff} \cdot \mathbf{q}_f - \sum_{f=1}^{F-1} \mathbb{H}_{Ff} \cdot \phi_f - \left( \frac{1}{2}\mathbb{I} + \mathbb{H}_{FF} \right) \cdot \phi_F \quad (104)$$

où  $\mathbb{G}_{FF} = \mathbb{G}_{(F-1)(F-1)} = \dots = \mathbb{G}_{11}$  est la seule matrice à inverser.

C'est là un résultat tout à fait intéressant puisqu'en terme de résolution de système linéaire, l'effort nécessaire pour résoudre tout le problème instationnaire est identique à celui nécessaire à la résolution du problème stationnaire. Pour ce qui est du calcul des coefficients, l'effort à fournir à chaque pas de temps est identique à celui d'un problème stationnaire. La résolution des problèmes inverse est basée sur la formulation directe (95) et l'introduction de la notion de pas de "temps futurs". La régularisation du problème est effectuée par décomposition en valeurs singulières. La mise en oeuvre de cette technique et sa validation sur des expériences et présentée par Lagier *et al.* (2001) et est détaillée, notamment en 3D, par Lagier (1999).

## 6 Vers la prise en compte des non linéarités

L'application de la méthode des éléments de frontière est par sa nature limitée aux problèmes non linéaires. De très nombreuses tentatives d'extension aux problèmes non linéaires ont été proposées. Elles ne seront pas détaillées ici et sont très largement présentées par Novak & Neves (1994), Partridge *et al.* (1992) ou Ramachandran (1994).

## Références

- Alifanov, O. M. 1994. *Inverse Heat transfer problems*. Springer-Verlag.
- Beck, J. B., Cole, K. D., Haji-Sheikh, A., & B., B. Litkouhi. 1992. *Heat conduction using Green's functions*. Hemisphere.
- Beck, J. V., Blackwell, B., & St. Clair Jr., C. J. 1985. *Inverse heat conduction, ill posed problems*. Wiley.
- Blake, J. R. 1971. A note on the image system for a Stokeslet on a no-slip boundary. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **70**, 303–310.
- Bonnet, M. 1995. *Equations intégrales et éléments de frontière*. CNRS Editions et Eyrolles.
- Bousquet, J. 1990. *Aérodynamique, méthode des singularités*. Cepadues Editions.
- Brebbia, C. A., & Dominguez, J. 1989. *Boundary elements, an introductory course*. Computational mechanics publications.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., & Wrobel, L. C. 1984. *Boundary element techniques, theory and application in engineering*. Springer-Verlag.
- Bui, H. D., Tanaka, M., Bonnet, M., Maigre, H., Luzzato, E., & Reynier, M. (eds). 1994. *Inverse problem in engineering mechanics, Proc. ISIP 94*. Balkema.
- Canot, E. 1989. *Généralisation de la méthode intégrale aux frontières pour les systèmes fluide-fluide*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Dulikravitch, G. S., & Martin, T. J. 1994. Inverse problems and design in heat conduction. *Pages 13–20 of: Bui, Tanaka et al. (ed), Inverse problems in engineering mechanics Proc. ISIP 94*. Balkema.
- Han, H., Ingham, D. B., & Yuan, Y. 1995. The Boundary element method for the solution of the backward heat conduction equation. *J. Comput. Physics*, **116**, 292–299.
- Hervieu, E., Coutris, N., & Tavares, M. 1992. Deformation of a fluid particle falling freely in an infinite medium. *Pages 201–207 of: ANS Proc. National Heat Transfer Conference*, vol. 6.
- Hess, J. L., & Smith, A. M. O. 1967. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. *Pages 1–138 of: Kucheman, D. (ed), Progress in Aeronautical Science*, vol. 8. Pergamon.
- Hunt, B., & Semple, W. G. 1980. The panel method for subsonic aerodynamic flows : a survey of mathematical formulations and numerical models and an outline of the new British Aerospace Scheme. *Pages 99–166 of: Kollman, W. (ed), Computational Fluid Dynamics*, vol. 1. Hemisphere.
- Ingham, D. B., & Yuan, Y. 1994. *The boundary element method for solving improperly posed problems*. ComputationalMechanics Publications. C. A. Brebbia And J. J. Connor Eds.
- Ladyzhenskaya, O. A. 1969. *The mathematical theory of viscous incompressible flows*. Gordon and Breach.
- Lagier, G. L. 1996. *Application de la méthode des éléments de frontière à l'équation de diffusion de la chaleur*. Tech. rept. STI/LEF/96-139. CEA/Grenoble. Mémoire de DEA de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, Spécialité : Energétique Physique et note interne.
- Lagier, G. L. 1999. *Application de la méthode des éléments de frontières à la résolution du problème inverse de conduction de la chaleur multidimensionnel, stationnaire et instationnaire. Régularisation par troncature de spectre*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble. Spécialité énergétique.
- Lagier, G. L., Lemonnier, H., & Coutris, N. 2001. The boundary element method for the solution of general multidimensional unsteady inverse heat conduction problem. *In: Proc of Eurotherm 68 seminar, Poitiers, France, March, 5-7*. submitted to the int. J. Therm. Science.
- Le Niliot, Ch. 1991. *Méthode des éléments de frontière pour la résolution des problèmes inverses en diffusion thermique*. Ph.D. thesis, Université de Provence.

- Lemonnier, H. 1984. *Optimisation du maillage et de la répartition de simple couche dans la méthode des singularités : application à la modélisation des écoulements cavitants*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Lemonnier, H., & Peytraud, J. F. 1995. A new algorithm for impedance imaging of two-phase flows. *Pages 539–546 of: Proc. of the ASME Heat Transfer Division and Fluids Engineering Division*. HTD 321/FED 233.
- Lemonnier, H., & Peytraud, J. F. 1996. Techniques tomographiques en écoulement diphasique. *La Houille Blanche*, **334**, 86–97.
- Lemonnier, H., & Peytraud, J. F. 1998. Is 2D impedance tomography a reliable technique for two-phase flows? *Nuclear Engineering and Design*, **184**, 253–268.
- Lemonnier, H., & Rowe, A. 1988. Another approach in modeling cavitating flows. *J. Fluid Mechanics*, **195**, 557–580.
- Lemonnier, H., Nakach, R., Favreau, C., & S.Selmer-Olsen. 1991. Sensitivity analysis of an impedance void meter to the void distribution in annular flow: a theoretical study. *Nuclear Engineering and Design*, **126**(1), 105–112.
- Martinez, M. J. 1989. *Viscous Flow of drops and bubbles in straight and constricted tubes*. Ph.D. thesis, University of California Berkeley.
- Morse, P. M., & Feshbach, H. 1953. *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill.
- Novak, A. J., & Neves, A. C. 1994. *The multiple reciprocity boundary element method*. Computational mechanics publications & Elsevier.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A., & Wrobel, L. C. 1992. *The dual reciprocity boundary element method*. Computational mechanics publications & Elsevier.
- Pasquetti, R., & Petit, D. 1995. Inverse diffusion by boundary elements. *Engineering analysis with boundary elements*, 197–205.
- Peytraud, J. F. 1995. *Etude de la tomographie électrique pour la mesure du taux de vide local pour les écoulements diphasiques*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Pozrikidis, C. 1992. *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. Cambridge University Press.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992. *Numerical recipes in Fortran*. Second edn. Cambridge University Press.
- Ramachandran, P. A. 1994. *Boundary element methods in transport phenomena*. Computational mechanics publications and Elsevier.
- Rocchi Tavares, M. 1992. *Simulation de la déformation d'un domaine fluide en mouvement dans un autre fluide par la méthode des éléments de frontières*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Sabry, M. N. 1984. *Sur une nouvelle méthode intégrale et son application aux écoulements de fluides visqueux avec ou sans transfert de chaleur, doctorat d'état ès sciences*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Sabry, M. N., & Lemonnier, H. 1995. The behavior of viscous flow near a corner singularity studied by an approximate integral method. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **7**(3), 77–100.
- Seager, A. D., & Bates, R. H. T. 1985. Full-wave computed tomography, part 4: low frequency electric current CT. *Pages 455–459 of: IEEE Proc. Part A*, vol. 132.
- Tulloch, D. L. 1993. *New developments and applications of the boundary element method for some problems in elasticity and viscous flow*. Ph.D. thesis, Mechanical Engineering of University of Sydney.
- Youngren, G. K., & Acrivos, A. 1975. Stokes flow past a particle of arbitrary shape : a numerical study. *J. Fluid Mechanics*, **69**, 377–403. Corrigendum, **75**, 813.