EQUATIONS des ECOULEMENTS DIPHASIQUES.

① Point de départ : LES BILANS GLOBAUX (4)

Règle de Leibniz et Théorème de Gauss

② Equations locales monophasiques.

Bilans sur 1 Volume fixe, interface mobile
Séparation contributions phasiques RdL et ThdG

③ Bilans locaux phasiques ET bilans aux interfaces

Moyenne spatiale ex: eqs. moyennées / section

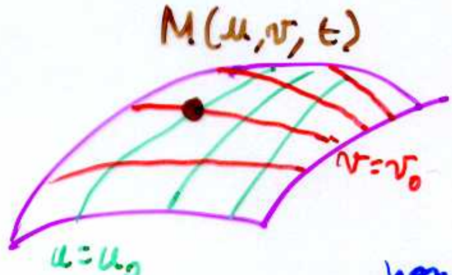
Moyenne Temporelle ex: locales (analogue Reynolds)

Moyennes composites : identités sur les termes d'échange aux interfaces

↳ Problématique de la fermeture

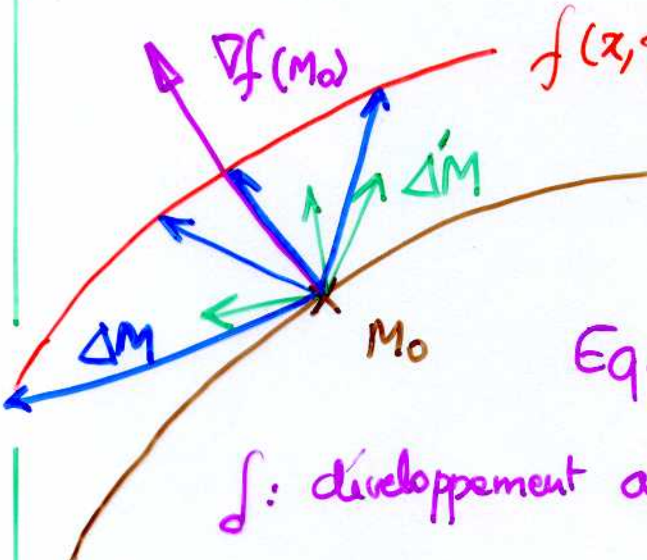
MECANIQUE des MILIEUX CONTINUS MONOPHASIQUES

OUTILS : Vitesse de déplacement d'une S.



$$v_i \triangleq \left.\frac{\partial M}{\partial t}\right)_{u,v} \qquad (1)$$

non intrinsèque : dépend du paramétrage



Eq. de la Surface : $f(x,y,z,t)=0$

f : développement au 1° ordre autour de $M_0 \in S$.

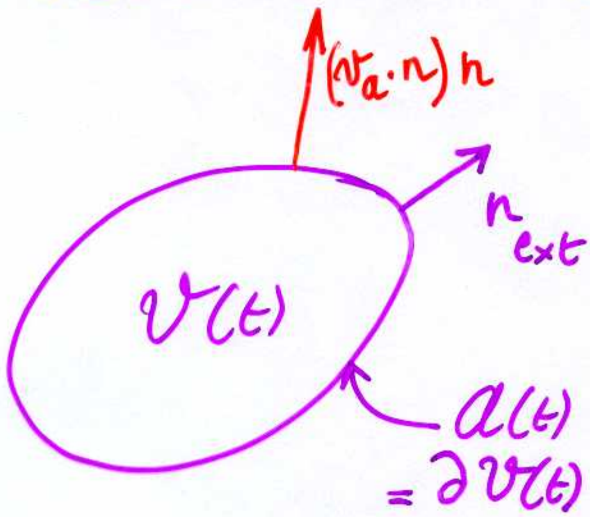
$$f(x,y,z,t+\Delta t) = f(x_0,y_0,z_0,t_0) + \Delta' M \cdot \nabla f(M_0) + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot \Delta t$$

Si $M + \Delta' M \in S \Rightarrow$

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} \cdot \frac{\nabla f(M_0)}{|\nabla f(M_0)|} = \frac{-\partial f/\partial t}{|\nabla f(M_0)|}$$

$$(2) \qquad v_i \cdot n = \frac{-\partial f/\partial t}{|\nabla f|} \quad \text{(intrinsèque)}$$

REGLE de LEIBNIZ : en 1D : th de dérivation sous le signe somme (Candel, 1995)



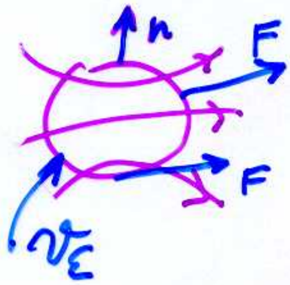
$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} f \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}(t)} f \, v_a \cdot n \, dA$$

théorème cinématique

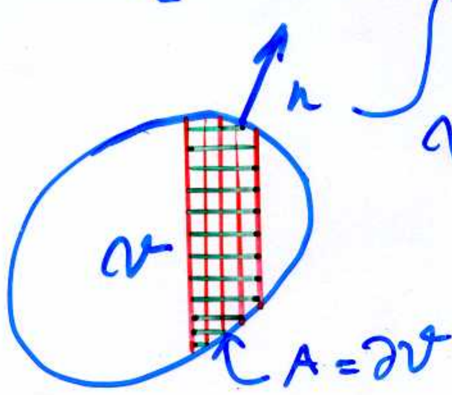
En particulier $\mathcal{V}(t) \neq$ volume matériel.

USAGE : $\frac{d}{dt}\int \longrightarrow \int \frac{\partial}{\partial t} + \cdots$

THEOREME de GAUSS : div = flux par unité de Vol.



$$\nabla \cdot F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|\mathcal{V}_\varepsilon|} \int_{\partial \mathcal{V}_\varepsilon} F \cdot n \, dA$$

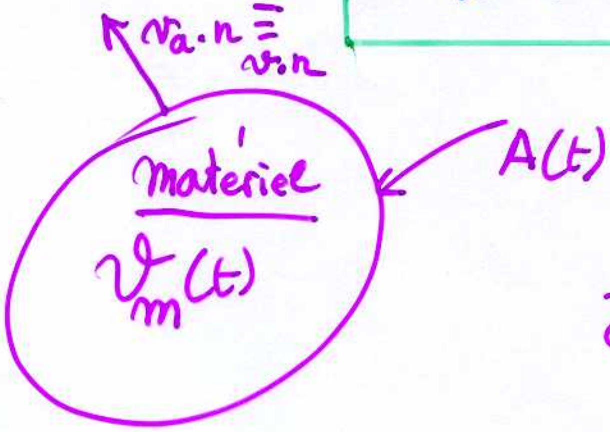


$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot F \, d\mathcal{V} = \int_A n \cdot F \, dA$$

F = Vecteur / Tenseur

USAGE : $\int_A dA \longrightarrow \int_V dV$

BILANS GLOBAUX sur un VOLUME MATERIEL



- MASSE

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \, d\mathcal{V} = 0$$

- TORSEUR des EFFORTS : qdm, m^t cinétique

(P.F de la dynamique)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho v \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho F \, d\mathcal{V} + \int_{A(t)} n.\Pi \, dA + (\cdots)$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}_m(t)} r \times \rho v \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m(t)} r \times \rho F \, d\mathcal{V} + \int_{A(t)} r \times n.\Pi \, dA \ldots$$

$r = OM$ O quelconque.

- BILAN D'ENERGIE TOTALE : 1° principe Th.D.

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \left(u + \frac{1}{2} v^2\right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho F.v \, d\mathcal{V} + \int_A (n.\Pi).v \, dA$$

$$- \int_A q.n \, dA + \cdots$$

BILANS GLOBAUX (Suite)

- INEGALITE ENTROPIQUE (sans Ray^t =)

pour l'UdeM : $dS \triangleq \frac{\delta Q}{T}$ T-Réversible

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho s \, d\mathcal{V} + \int_A \frac{q \cdot n}{T} \, dA = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \Delta \, d\mathcal{V} \geqslant 0$$

$\Delta \geqslant 0$ source d'entropie locale

$\Delta = 0$ SSI évolution reversible

EQUATIONS LOCALES

Bilans Globaux RdL + TG $\rightarrow$ Eqs locales

Exemple : bilan de Masse.

GLOBAL: $$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \, d\mathcal{V} = 0 \qquad \forall \mathcal{V}_m(t) \in \mathcal{D}_f.$$

① Règle de Leibniz ⚠ V. Mat $v_a \cdot n = v \cdot n$

$$\int_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial}{\partial t}\rho \, d\mathcal{V} + \int_{A(t)} \rho v \cdot n \, dA = 0$$

② Théorème de GAUSS

$$\int_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial}{\partial t}\rho \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_m(t)} \nabla \cdot \rho v \, d\mathcal{V} = 0$$

$$\Longrightarrow \forall V_m(t) \int_{\mathcal{V}_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v\right] d\mathcal{V} = 0$$

LOCAL: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v = 0$$

EQUATIONS LOCALES

- Bilan de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \rho v = 0 \qquad (1)$$

- Bilan de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla . (\rho v v) = \rho F + \nabla . \Pi \qquad (2)$$

- Bilan de qté de mvt angulaire

pas de couple appliqué $\Pi = {}^t\Pi$ id^{t} vérifiée (3)

- Bilan d'énergie totale

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(u + \tfrac{1}{2} v^2) \right) + \nabla . v \left(\rho(u + \tfrac{1}{2} v^2) \right) = \rho F . v + \nabla . (\Pi . v) - \nabla . q \qquad (4)$$

- Inégalité entropique

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho s + \nabla . \rho s v + \nabla . \frac{q}{T} = \Delta \geq 0 \qquad (5)$$

ORGANIGRAMME des EQS de la MECANIQUE des M.C.

BILANS GLOBAUX

1 – • Masse
2 – • qté de mvt (linéaire)
3 – • qté de mvt angulaire
4 – • Énergie totale (interne + cinétique)
5 – • Inégalité entropique

EQUATIONS LOCALES INSTANTANÉES.

Primaires

(1) → • masse (6)
(2) → • quantité de mvt (7)
(3) → • symétrie du tenseur des contraintes.
(4) → • énergie totale (8)
(5) → • inégalité entropique (9)

Secondaires

• qdm . V : énergie mécanique (10)
• (8) – (10) : énergie interne (11)

on introduit l'enthalpie $h = u + \frac{p}{\rho}$

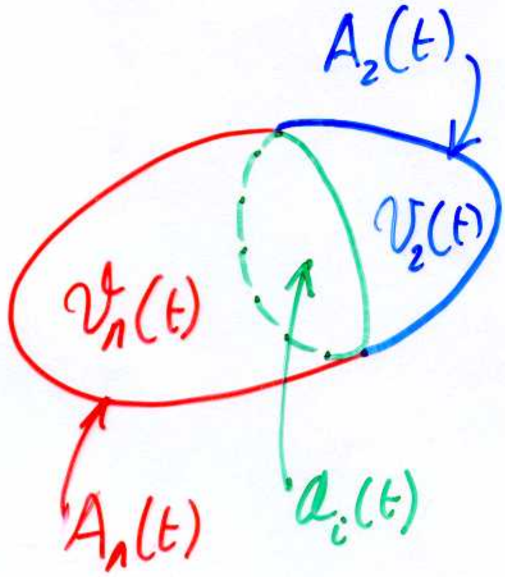
• (11) → bilan d'enthalpie (12)

Relation de Gibbs $du = T ds - p\, d(1/\rho)$

• (11) → bilan d'entropie (13)

Identification de Δ sources d'entropie : (5) et (13)

BILANS PHASIQUES



- $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1(t) + \mathcal{V}_2(t) \equiv$ Fixe

$\boxed{\text{Exemple: bilan de masse}}$

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\rho v\right) dV = 0$$

- Règle de Leibniz + Théorème de la divergence (V)
- individualiser les contributions de V_1 et V_2

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}_1(t)} \rho_1 d\mathcal{V} + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}_2} \rho_2 d\mathcal{V} + \int_{a_1} \rho_1 v_1 \cdot n_1 \, da + \int_{a_2} \rho_2 v_2 \cdot n_2 \, da = 0$$

- Pour chaque volume $\mathcal{V}_1(t)$ et $\mathcal{V}_2(t)$ RL + ThG

$$RL(\mathcal{V}_1) \quad \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}_1} \rho_1 d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}_1} \frac{\partial}{\partial t}\rho_1 d\mathcal{V} + \int_{a_i} \rho_1 v_i \cdot n_1 \, dA.$$

$$ThG(\mathcal{V}_1) \quad \int_{a_1} \rho_1 v_1 \cdot n_1 \, da = \int_{\mathcal{V}_1} \nabla\cdot\rho_1 v_1 \, d\mathcal{V} - \int_{a_i} \rho_1 v_1 \cdot n_1 \, dA.$$

— idem (2), on substitute $\Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{2} \underbrace{\int_{\mathcal{V}_k(t)} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla\cdot\rho_k v_k\right) d\mathcal{V}}_{\text{EDP } \mathcal{V}_1} - \int_{a_i(t)} \underbrace{\left[\overbrace{\rho_1(v_1 - v_i)n_1}^{\dot{m}_1} + \overbrace{\rho_2(v_2 - v_i)n_2}^{\dot{m}_2}\right]}_{\text{bilan interface}} dA = 0$$

BILANS PHASIQUES (suite)

- forme générale :

$$\sum_{k=1}^{2} \int_{\mathcal{V}_k(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho_k \psi_k + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k v_k) + \nabla \cdot J_k - \rho_k \phi_k \right] dv$$

$$- \int_{a_i(t)} \left[\sum_{k=1}^{2} \dot{m}_k \psi_k + n_k \cdot J_k + \phi_i \right] da = 0$$

$$\dot{m}_k \triangleq \rho_k (v_k - v_i) \cdot n_k$$

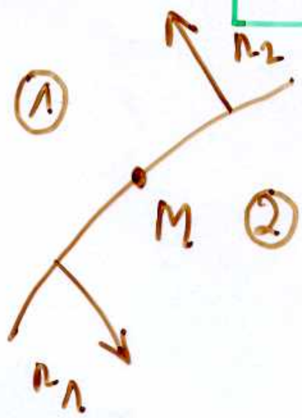
Equations à satisfaire $\forall\ \mathcal{V}_k(t)$ et $a_i(t) \Rightarrow$ ELI

Phases : $\frac{\partial}{\partial t} \rho_k \psi_k + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k v_k) + \nabla \cdot J_k - \rho_k \phi_k = 0$

Interfaces : $\sum_{k=1}^{2} \dot{m}_k \psi_k + n_k \cdot J_k + \phi_i = 0$

Bilan	ψ_k	J_k	ϕ_k	ϕ_i
masse	1	0	0	
qdm	v_k	$-\Pi_k$	F	
énergie T.	$u + \frac{1}{2} v_k^2$	$q_k - \Pi_k \cdot v_k$	$F \cdot v_k$	
entropie	s_k	$\frac{1}{T_k} q_k$	$\frac{1}{\rho_k} \Delta_k$	Δ_i

BILANS aux INTERFACES
EQUATIONS de SAUT



- bilan de masse

$$\underbrace{\rho_1 (v_1 - v_i) \cdot n_1}_{\dot{m}_1} + \underbrace{\rho_2 (v_2 - v_i) \cdot n_2}_{\dot{m}_2} = 0$$

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0$$

avec : $\dot{m}_k \triangleq \rho_k (v_k - v_i) \cdot n_k$

Exemple : pas de chgt de phase $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 0$

$\Rightarrow (v_1 - v_i) \cdot n_1 = (v_2 - v_i) n_2 = 0 \Rightarrow (v_1 - v_2) \cdot n_1 = 0$

$\Rightarrow$ si on admet H : pas de glissement $v_{t_1} = v_{t_2} (\Rightarrow \Delta i)$

$\Rightarrow v_1 = v_2$ à l'interface

- bilan de quantité de mouvement

$$\dot{m}_1 v_1 + \dot{m}_2 v_2 - n_1 \Pi_1 - n_2 \cdot \Pi_2 = 0$$

H_1 : pas de viscosité $\qquad v_k = v_k^n + v_k^t$

$$\begin{cases} \dot{m}_1 (v_1^n - v_2^n) + (p_1 - p_2) n_1 = 0 \\ v_1^t = v_2^t \end{cases}$$

BILANS aux INTERFACES (Suite).

- bilans de qdm (fluide visqueux) : $\mathbb{T} = -p\,\mathbb{U} + \tau$

$$\dot{m}_1 (v_1 - v_2) + (p_1 - p_2)\, n_1 + (\tau_2 - \tau_1) \cdot n_1 = 0$$

$\rightarrow$ 2 projections $\cdot n$ et $\cdot t \in a_i$

- Cas Particulier : 1D, $v_k \perp$ interface $\uparrow x$

$\perp$: $\dot{m}_1 (v_1 - v_2)\, n_1 + (p_1 - p_2) + n_1 . (\tau_2 - \tau_1) . n_1 = 0$

1D : $\dfrac{dv_k}{dx} = 0 \Rightarrow \tau_k \equiv 0$

$$\Rightarrow \dot{m}_1 (v_1 - v_2) . n_1 + (p_1 - p_2) = 0 .$$

Bilan de masse (def) $\dfrac{\dot{m}_k}{\rho_k} = (v_k - v_i)\, n_k .$

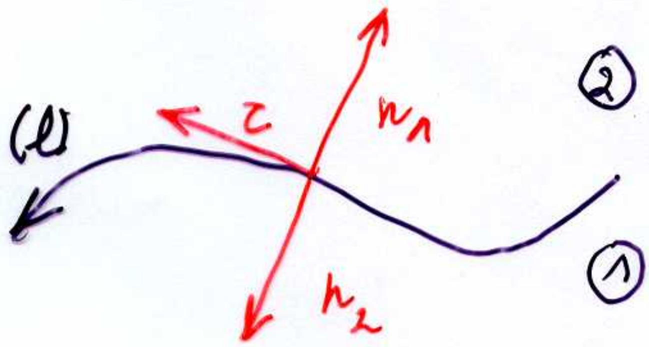
$$\dot{m}_1 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = (v_1 - v_2) . n_1$$

$\Rightarrow$ à l'interface :

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2}\, \dot{m}_1^2$$

$$p_1 - p_2 \propto \rho_1 - \rho_2 \quad \forall\, \mathrm{sgn}(\dot{m}_1)$$

BILAN de QDM à L'INTERFACE : Effet de la TENSION SUPERFICIELLE



Généralisation du bilan à l'interface (2D)

$$\dot{m}_1 v_1 + \dot{m}_2 v_2 - n_1 \cdot \Pi_1 - n_2 \Pi_2 + \frac{d\sigma}{dl}\tau - \frac{\sigma}{R} n_1 = 0$$

Exemple : fluides non visqueux.

$$n_1(p_1 - p_2) + \frac{d\sigma}{dl}\tau - \frac{\sigma}{R} n_1 = 0$$

$\perp$: loi de Laplace $p_1 - p_2 = \frac{\sigma}{R}$

// : incohérence : $\mu_k = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{dl} = 0$

effet Marangoni (fluides visqueux)

$$(-n_1 \cdot \tau_1 - n_2 \tau_2) \cdot \tau + \frac{d\sigma}{dl} = 0$$

$\sigma(C)$: mousse ; $\sigma(T)$: flux d'Hydrocarbures

BILAN D'ENERGIE et INEGALITE ENTROPIQUE

- bilan d'Energie totale

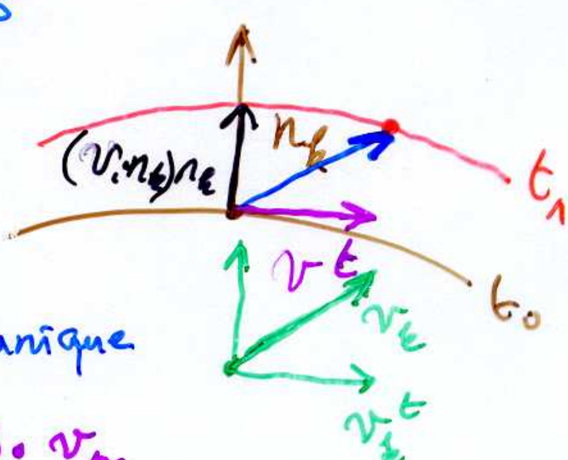
$$\dot m_1 \left(u_1 + \frac{1}{2} v_1^2\right) + \dot m_2 \left(u_2 + \frac{1}{2} v_2^2\right) + q_1 \cdot n_1 + q_2 \cdot n_2 = 0$$

- Inégalité entropique

$$\Delta_i = -\dot m_1 s_1 - \dot m_2 s_2 - \frac{1}{T_1} q_1 \cdot n_1 - \frac{1}{T_2} q_2 \cdot n_2 \geq 0$$

- Equations secondaires

$$v_p \stackrel{\Delta}{=} (v_i \cdot n_k) n_k + v^t$$



- bilan d'Energie mécanique

$$\text{Saut}[EM] = \text{Saut}[QDM] \cdot v_p$$

- bilan d'Energie interne

$$\text{Saut}[EI](u) = \text{Saut}[ET] - \text{Saut}[EM]$$

- bilan d'Enthalpie $\quad h \stackrel{\Delta}{=} u + \frac{p}{\rho}$

$$\dot m_k \stackrel{\Delta}{=} \rho_k (v_k - v_i) n_k \Longrightarrow v_k - v_p = \frac{\dot m_k}{\rho_k} n_k + v_k^t - v^t$$

BILANS LOCAUX (fin).

- bilan d'enthalpie

$$\sum_k \left\{ \dot{m}_k \left(h_k + \frac{1}{2}(v_k - v_p)^2 - \frac{1}{\rho_k}(\overline{\overline{\tau}}_k \cdot n_k) n_k \right. \right.$$
$$\left. \left. + q_k \cdot n_k - (\overline{\overline{\tau}}_k \cdot n_k) \cdot (v_k^t - v^t) \right) \right\}$$

Termes cinétiques et visqueux négligés :

$$\dot{m}_1 (h_1 - h_2) + (q_1 - q_2) \cdot n_1 = 0$$

- bilan d'entropie : $g_k \hat{=} h_k + T_k s_k$

Saut [Enthalpie] ; Source d'entropie Δ_i et $\Rightarrow T_i$

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{m}_k}{T_i} \left[g_k + \frac{1}{2}(v_k - v_p)^2 - \frac{1}{\rho_k}(\overline{\overline{\tau}}_k \cdot n_k) n_k \right]$$
$$+ (q_k \cdot n_k + \dot{m}_k s_k T_k)\left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_k} \right)$$
$$- \frac{1}{T_i} (\overline{\overline{\tau}}_k \cdot n_k) \cdot (v_k^t - v^t) \geq 0$$

Hypothèse de Réversibilité à l'interface : $\Delta_i = 0 \; \underline{\forall \dot{m}_k}$

1) $T_1 = T_2 = T_i$

2) $v_1^t = v_2^t = v^t$

3) $g_1 - g_2 = (\quad)$ + 2) et def $\dot{m}_k$

$$g_1 - g_2 = \frac{1}{2} \dot{m}_k \left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) - \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_2}(\overline{\overline{\tau}}_2 \cdot n_2) \cdot n_2 \\ - \frac{1}{\rho_1}(\overline{\overline{\tau}}_1 \cdot n_1) \cdot n_1 \end{array} \right\}$$

PROBLEMES RESOLUS par les EQs LOCALES

- Bilan Globaux : Principes fondamentaux

→ Equations locales phasiques.

→ Conditions de Saut à l'interface

- Problèmes diphasiques simples
  - Ecoulement d'un film liquide (Flooding)
  - Croissance d'une bulle (Ebullition nuclée, cavitation, etc..)

- <u>Problèmes diphasiques complexes :</u>
  - multiplicité d'interfaces, déséquilibres.
  - fluctuations, évolution des grandeurs moyennes

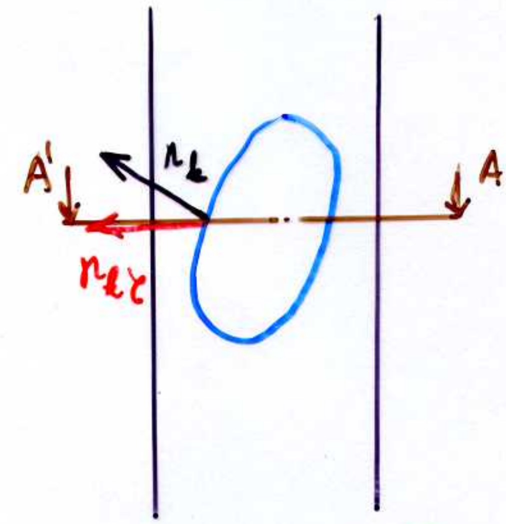
↳ Equations locales moyennées [T] (codes) 3D

↳ Equations moyennées sur la section (Hyd 2φ)

↳ Moyennes composites T / Espace.

OPERATEURS de MOYENNE SPATIALE INSTANTANÉS

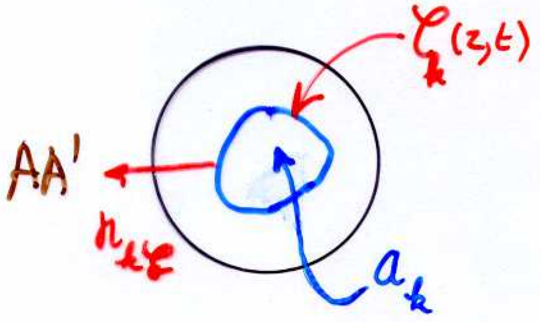
- Moyenne sur la section $(n=2)$



$$\langle f_k \rangle_2 = \frac{1}{A_k} \int_{A_k(z,t)} f_k \, dA$$

$$\langle\langle f_k \rangle\rangle_2 = \frac{1}{A} \int_{A(z)} f_k \, dA$$

$$A = A_1 + A_2$$



- Bilan local phasique
ex: bilan de masse

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_k v_k = 0$$

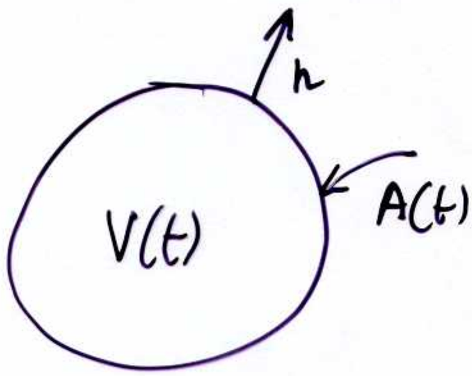
- Integration sur la section → bilan grandeurs moy.

$$\int_{a_k(z,t)} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} \, da + \int_{a_k(z,t)} \nabla \cdot \rho_k v_k \, da = 0$$

Règle de Leibniz — Théorème de Gauss

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{a_k(z,t)} \rho_k \, da + \cdots}_{\text{Règle de Leibniz}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \int_{a_k(z,t)} \rho_k w_k \, dA + \cdots}_{\text{Théorème de Gauss}} = 0$$

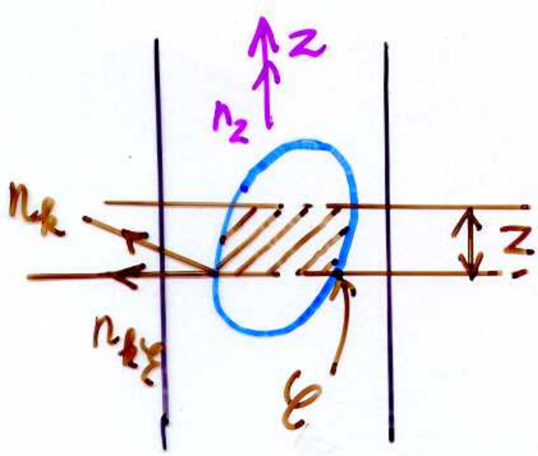
FORMES LIMITES de LA REGLE de LEIBNIZ et du Th de GAUSS



- Règle de Leibniz

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f\, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\, dV + \int_{A(t)} f\, v_i \cdot n\, dA$$

- forme limite — Aire ($z \to 0$)



$$\frac{d}{dt}\int_{A_k(z,t)} f_k\, dA = \int_{A_k(z,t)} \frac{\partial f_k}{\partial t}\, dA + \int_{\mathcal{C}(z,t)} f_k\, v_i \cdot n_k \frac{d\mathcal{C}_k}{n_k \cdot n_{k\mathcal{C}}}$$

- Théorème de GAUSS

$$\int_V \nabla \cdot B\, dV = \int_a n \cdot B\, da$$

- forme limite

$$\int_{a_k(z,t)} \nabla \cdot B\, dA = \frac{\partial}{\partial z}\int_{a_k(z,t)} B \cdot n_z + \int_{\mathcal{C}(z,t)} n_k \cdot B \frac{d\mathcal{C}}{n_k \cdot n_{k\mathcal{C}}}.$$

- identité utile $B = n_z$

$$\frac{\partial a_k(z,t)}{\partial z} = -\int_{\mathcal{C}} n_k \cdot n_z \frac{d\mathcal{C}}{n_k \cdot n_{k\mathcal{C}}}$$

EXEMPLES D'EQS MOYENNÉES sur A

- bilan de Masse :

...RL + ...TG

$$\frac{\partial}{\partial t} a_k \langle \rho_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} a_k \langle \rho_k w_k \rangle_2 = -\int_{\mathcal{C}(z,t)} \dot{m}_k \frac{d\mathcal{C}}{n_k \cdot n_{kc}}$$

- bilan de qdm ($\cdot n_z$)

$$\frac{\partial}{\partial t} a_k \langle \rho_k w_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} a_k \langle \rho_k w_k^2 \rangle_2 - a_k \langle \rho_k F_z \rangle_2$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} a_k \langle p_k \rangle_2 - \frac{\partial}{\partial z} a_k \langle n_z \cdot \tau_k \cdot n_z \rangle_2 =$$

$$-\int_{\mathcal{C}(z,t)} n_z \cdot (\dot{m}_k v_k - n_k \Pi_k) \frac{d\mathcal{C}}{n_k \cdot n_{kc}} + \int_{\mathcal{C}_k(z,t)} n_z \cdot (n_k \cdot \Pi_k) \frac{d\mathcal{C}}{n_k \cdot n_{kc}}$$

→ simplification : p_k uniforme sur $\underline{\mathcal{C}}^*$ et $\underline{p_k} = \langle p_k \rangle_2$

($\Pi_k = -p_k \mathbb{I} + \tau_k$) ↳ $p_i \neq p$ parfois

↳ forme simplifiée (th de Gauss $B = n_z$)

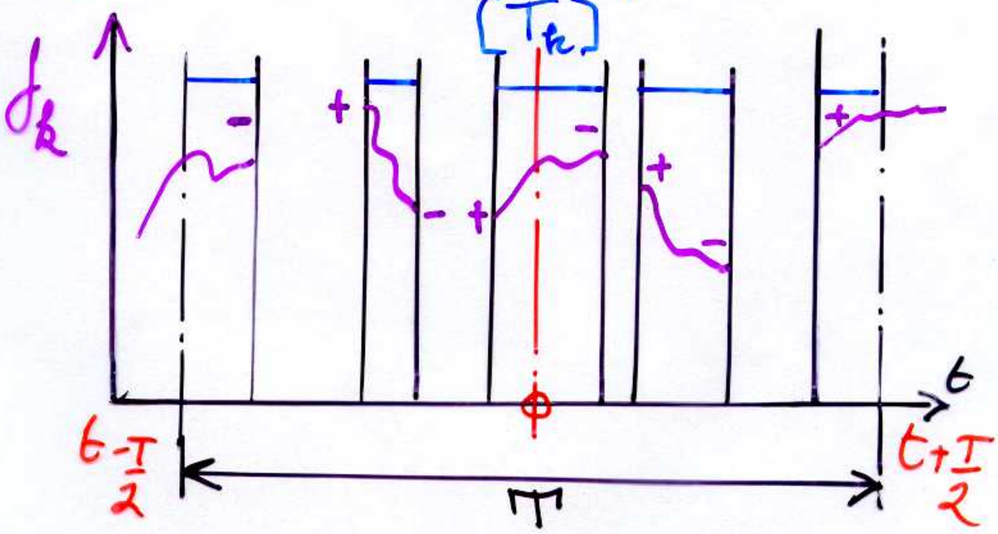
$$\frac{\partial}{\partial t} a_k \langle \rho_k w_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} a_k \langle \rho_k w_k^2 \rangle_2 - a_k \langle \rho_k F_z \rangle_2$$

$$+ a_k \frac{\partial p_k}{\partial z} - a_k \langle n_z \cdot \tau_k \cdot n_z \rangle_2 =$$

$$-\int_{\mathcal{C}(z,t)} n_z \cdot (\dot{m}_k v_k - n_k \tau_k) \frac{d\mathcal{C}}{n_k \cdot n_{kc}} + \int_{\mathcal{C}_k(z,t)} n_z \cdot (n_k \cdot \tau_k) \frac{d\mathcal{C}}{n_k \cdot n_{kc}}$$

OPERATEURS de MOYENNE TEMPORELLE (locale)

- Moyenne sur le temps de présence $[T_k]$



Rappel : $\overline{f}^{x} = \dfrac{1}{T_k}\displaystyle\int_{[T_k]} f_k \, dt = \dfrac{\frac{1}{T}\int_{[T]} f_k \, x_k \, dt}{\frac{1}{T}\int_{[T]} x_k \, dt} \triangleq \dfrac{\overline{x_k f_k}}{\overline{x_k}}$

avec $\overline{f} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{[T]} f \, dt$

- bilan local physique (masse)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_k + \nabla \cdot \rho_k v_k = 0$$

- Intégration sur $[T_k]$

$$\int_{[T_k]} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} dt + \int_{[T_k]} \nabla \cdot \rho_k v_k \, dt = 0$$

Regle "Leibnitz temporelle" — Th de "Gauss temporel"

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{[T_k]} \rho_k \, dt + \ldots + \nabla \cdot \int_{[T_k]} \rho_k v_k \, dt + \ldots = 0$$

FORMES PARTICULIÈRES de la RÈGLE de LEIBNIZ et du Théorème de Gauss.

- Règle de LEIBNIZ

$$\int_{[T_k]} \frac{\partial f_k}{\partial t}\, dt = \frac{\partial}{\partial t}\int_{[T_k]} f_k\, dt - \sum_{\substack{disc.\\ \in [T]}} f_k \overbrace{\frac{v_i \cdot n_k}{|v_i \cdot n_k|}}^{\pm 1}$$

- Théorème de Gauss

$$\int_{[T_k]} \nabla\cdot B_k\, dt = \nabla\cdot\int_{[T_k]} B_k\, dt + \sum_{\substack{disc\\ \in [T]}} \frac{n_k\cdot B_k}{|v_i\cdot n_k|}$$

Cas particuliers utiles $f_k = 1$; $B_k = U$ et $\div T$

$$\frac{\partial}{\partial t} T_k(x) = \sum_{\substack{disc\\ \in T}} \frac{v_i\cdot n_k}{|v_i\cdot n_k|} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\alpha_k = \frac{1}{T}\sum_{\substack{disc\\ \in [T]}}\frac{v_i\cdot n_k}{|v_i\cdot n_k|}$$

$$\nabla\cdot T_k(x)\, U = -\sum_{\substack{disc\\ \in [T]}} \frac{n_k}{|v_i\cdot n_k|} \Rightarrow U\cdot\nabla\alpha_k = \nabla\alpha_k = -\frac{1}{T}\sum_{\substack{disc\\ \in [T]}} \frac{n_k}{|v_i\cdot n_k|}$$

- Bilan de masse local moyenné

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_k \overline{\rho_k}^{x} + \nabla\cdot\alpha_k \overline{\rho_k v_k}^{x} = -\frac{1}{T}\sum_{\substack{disc\\ \in [T]}} \frac{\dot m_k}{|v_i\cdot n_k|}$$

Moyennes COMPOSITES
Temps - Espace

- Bilan de masse

Esp/T : $$\frac{\partial}{\partial t}\overline{a_k\langle\rho_k\rangle} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{a_k\langle\rho_k w_k\rangle} = -\overline{\int_{C_{(z,t)}} \dot m_k \frac{d\varphi}{n_k\cdot n_{kC}}}$$

T/Esp $$\frac{\partial}{\partial t} a \langle\!\langle \alpha_k \overline{\rho_k}^x \rangle\!\rangle + \frac{\partial}{\partial z} a\langle\!\langle \alpha \overline{\rho_k w_k}^x\rangle\!\rangle = -a \langle\!\langle \sum_{\substack{disc\\ \in [T]}} \frac{\dot m_k}{T[v_i\cdot n_k]}$$

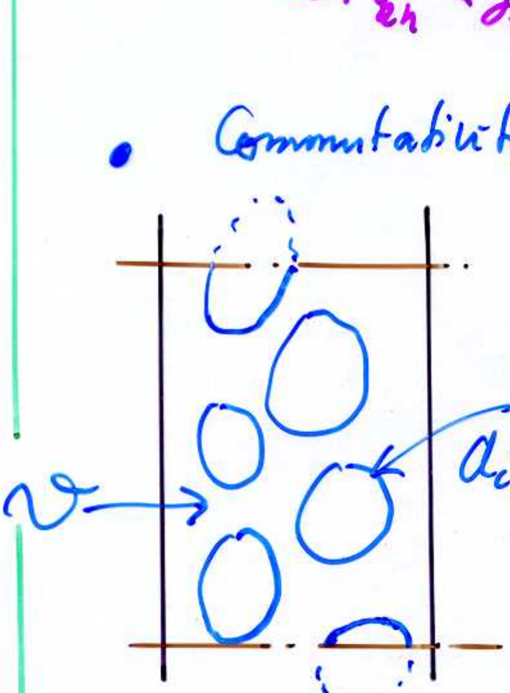
- Ordre d'intégration

— Grandeurs mesurables / Régime d'écoulement

- Commutativité des Opérateurs de moyenne

$$\overline{a R_{kn}\langle f_k\rangle_n} \equiv a\langle\!\langle \alpha_k \overline{f_k}^x\rangle\!\rangle$$

- Commutativité des Termes d'interaction



$$\int_v \sum_{\substack{disc\\ \in[T]}} \frac{B_k\cdot n_k}{T|v_i\cdot n_k|} \equiv \overline{\int_{a_i(t)} B_k\cdot n_k\, da}$$

$$\int_v \sum_{\substack{disc\\ \in[T]}} \frac{dv}{|v_i\cdot n_k|} \equiv \int_{[T]} a_i(t)\,dt$$

aire interf. spéc : $\gamma(x) = \sum_{\substack{disc\\ \in T}} \frac{1}{T|v_i\cdot n_k|}$