

MODELES 1D MOYENNES [T]

- MODELE HOMOGENE (HEM)
- MODELE DRIFT FLUX
- MODELE à DEUX FLUIDES
 - fermeture
 - conséquences des choix de modélisation
 - 1) cohérence physique
 - 2) Nature du système EDP (schéma numérique).

MODELE HOMOGENE A L'EQUILIBRE THERMO.

• EVOLUTIONS IMPOSEES

3 éqs de bilan pour le mélange
+ 3 conditions :

$$R_G = \beta \triangleq \frac{Q_G}{Q_G + Q_L} \equiv (w_G = w_L)$$

$$T_L = T_{\text{sat}}(p)$$

$$T_G = T_{\text{sat}}(p)$$

$$3 + 3 = 6.$$

• HYPOTHESES $V_L, V_G \ll V_{\text{son } 2\phi}$ ($\Delta \ll c_{1\phi}$)

$$R_G = \beta \triangleq \frac{Q_G}{Q_G + Q_L} = \frac{\alpha \rho_L}{\alpha \rho_L + (1-\alpha) \rho_G} = R_G(\alpha, p)$$

$$\rho_L = \rho_{\text{sat}}(p)$$

$$\rho_G = \rho_{\text{v sat}}(p)$$

$$h_L = h_{\text{sat}}(p)$$

$$h_G = h_{\text{v sat}}(p)$$

Steam Tables

$$\rho \triangleq R_G \rho_G + (1-R_G) \rho_L$$

$$(1) \quad \frac{\partial p_w}{\partial z} = 0 \Rightarrow p_w = G = \text{cte}$$

$$(2) \quad \frac{d}{dz} p w^2 = -\frac{dp}{dz} + \rho F_z - \frac{P}{A} z_w \quad \left(\frac{P}{A} = \frac{4}{D} : \phi \right)$$

$$(3) \quad \frac{d}{dz} p w h = \frac{P}{A} \psi \quad h = \alpha h_L + (1-\alpha) h_G$$

FERMETURES HEM

- lois constitutives.

frottement en Paroi $\tau_w = f_w(p, w, \mu, \dots)$

flux de chaleur $\Phi = f_c(p, w, \mu, \dots)$

- Propriétés thermodynamiques.

- dépend de la forme finale du système

EDP : conservative ou non $= \left(A \frac{\partial x}{\partial t} + B \frac{\partial x}{\partial z} = C \right)$

Variables C: p, w ; $p + \rho w^2$; $h + \frac{1}{2} w^2$

Variables NC: x, w, μ .

- dérivées ou définitions implicites cohérentes.

Exemple en variables NC.

$$\frac{1}{\rho} = v = x v_v + (1-x) v_L$$

$$h = e + \frac{1}{\rho}$$

$$h = x h_v + (1-x) h_L$$

"TABLES"

$$v_v = v_{vsat}(p)$$

$$v_L = v_{Lsat}(p)$$

$$h_v = h_{vsat}(p)$$

$$h_L = h_{Lsat}(p)$$

et connaît $T_{sat}(p)$ qds les
tables sont paramétrées en T°

$$+ v_{v,p}, v_{L,p}, h_{L,p}, h_{v,p}$$

MODELE à FLUX de DÉRIVE

• Cas particulier Isotherme $T_L = T_G = T_0$

$w_L \neq w_G$ (2 Vitesses)

• bilan de masse (gaz)

$$\frac{\partial}{\partial t} A \alpha \rho_G + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha \rho_G w_G = \Gamma_G$$

• bilan de masse (liquide)

$$\frac{\partial}{\partial t} A(1-\alpha)\rho_L + \frac{\partial}{\partial z} A(1-\alpha)\rho_L w_L = \Gamma_L = -\Gamma_G (!).$$

• bilan de qdm mélange

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A[(1-\alpha)\rho_L w_L + \alpha \rho_G w_G] + \frac{\partial}{\partial z} A[(1-\alpha)\rho_L w_L^2 + \alpha \rho_G w_G^2] \\ + A \frac{\partial \rho}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} \int A z w \end{aligned}$$

• Equation d'évolution (FLICA)

$$w_L - w_G = f(\alpha, \mu, \alpha, \text{regime d'éc} \dots)$$

ou $J_{LG} = f(\alpha \dots + \text{regime d'éc})$

Transitoires "lents"

MODELE à 2 fluides

- Déséquilibres mécaniques et Thermodynamique (CATHARG, RELAP, TRAC...)

1) 6 éqs 3 masses, qté de mvt, énergie totale / phases

2) 6 éqs 1 phase dispersée : 3 bilans (M, QDM, ET)
Mélange : 3 bilans (M, QDM, ET)

↑ addition des éqs physiques, disparition

Equation "mère"

des termes interfaciaux (Belaudat)

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k \psi_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle n_k \cdot \rho_k \psi_k v_k \rangle_2$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[A_k \langle n_k \cdot J_k \rangle - A_k \langle \rho_k \phi_k \rangle \right] =$$

$$\int_{\psi_k(z,t)} (\dot{m}_k \psi_k + n_k \cdot J_k) \frac{d\psi}{n_k \cdot n_k \varepsilon} - \int_{C_k(z,t)} n_k \cdot J_k \frac{d\varepsilon}{n_k \cdot n_k \varepsilon}$$

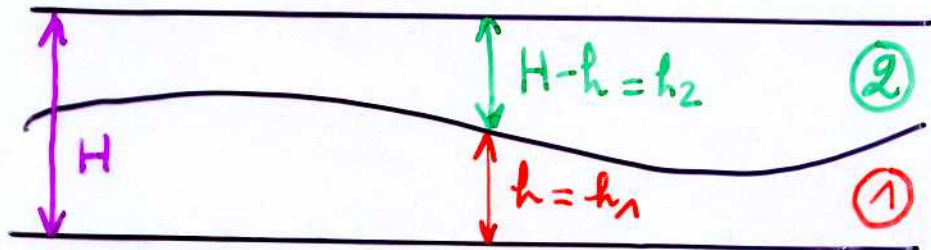
FERMETURES :

- Loi topologique $\langle \rangle; \langle \rangle \langle \rangle$, pressions
- Termes d'interaction à l'interface (M, QDM, ET)
- Termes d'interaction de chaque phase avec la paroi : frottement et flux de chaleur.

CONSEQUENCES : propagation / ec-critique ; hyperbolicité

EXEMPLE ILLUSTRATIF L'ÉCOULEMENT STRATIFIÉ

- Modèle isotherme 2D moyenné sur hauteur.



valeurs de masse :

H : { isotherme, incomp. }
horizontal, $\mu = 0$
 σ et $m = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} h_1 \rho_1 + \frac{\partial}{\partial z} h_1 \rho_1 \langle u_1 \rangle = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h_2 \rho_2 + \frac{\partial}{\partial z} h_2 \rho_2 \langle u_2 \rangle = 0$$

valeurs de qdm (phases + interface) :

$$\frac{\partial}{\partial t} h_1 \rho_1 \langle u_1 \rangle + \frac{\partial}{\partial z} h_1 \rho_1 \langle u_1^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial x} h_1 \langle p_1 \rangle = \tau_{i1} \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h_2 \rho_2 \langle u_2 \rangle + \frac{\partial}{\partial z} h_2 \rho_2 \langle u_2^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial x} h_2 \langle p_2 \rangle = \tau_{i2} \frac{\partial h_2}{\partial x}$$

$$\tau_{i1} = \tau_{i2} \triangleq \tau_i$$

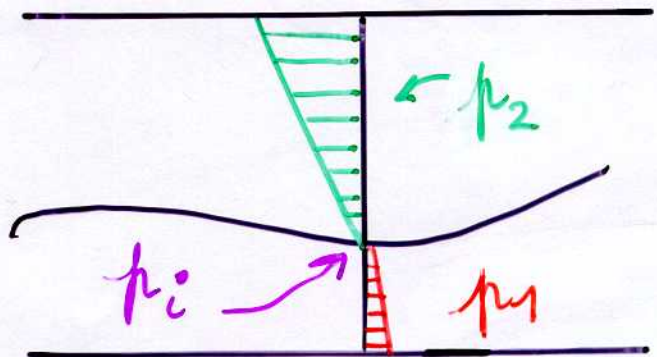
4 éqs : 5 inconnues $h_1, \langle u_1 \rangle, \langle u_2 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle$

3 variables supplémentaires $\langle u_1^2 \rangle, \langle u_2^2 \rangle, \tau_i$

loi topologique :

$$\langle p_1 \rangle = p_i + \frac{1}{2} \rho_1 g h_1$$

$$\langle p_2 \rangle = p_i - \frac{1}{2} \rho_2 g h_2$$



↳ ne se déduit d'aucun bilan moyenné
(y compris qd m ⊥.)

Corrélations spatiales

$$\frac{\langle u_k^2 \rangle}{\langle u_k \rangle^2} = 1.$$

autre hypothèse : relaxation
des profils de vitesse

$$\frac{d}{dt} \langle u_k^2 \rangle = \frac{1}{T} [\langle u_k^2 \rangle - \langle u_k^2 \rangle_0]$$

↳ système fermé ✓.

Solution petites perturbations (Nature des caractéristiques)

$$A \frac{\partial X}{\partial t} + B \frac{\partial X}{\partial z} = 0; X = (h, u_1, u_2, p_1)$$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 (H-h) & 0 \end{bmatrix}$$

$$B \triangleq \begin{bmatrix} \rho_1 u_1 & \rho_1 h & 0 & 0 \\ -\rho_2 u_2 & 0 & \rho_2 (H-h) & 0 \\ \rho_1 g \frac{h}{2} & \rho_1 u_1 h & 0 & h \\ (\rho_1 - \frac{\rho_2}{2}) g (H-h) & 0 & \rho_2 u_2 (H-h) & H-h \end{bmatrix}$$

Petites Perturbations

$$X = X_0 + \varepsilon X_1 + O(\varepsilon) \quad \varepsilon \ll 1$$

linéarisation séparation des ordres (poly en $\varepsilon, \forall \varepsilon$)
+ hypothèse des gtes longueurs d'onde

$$\begin{cases} A(X_0) \frac{\partial X_0}{\partial t} + B(X_0) \frac{\partial X_0}{\partial x} = 0 & \text{(sol. de base)} \\ A(X_0) \frac{\partial X_1}{\partial t} + B(X_0) \frac{\partial X_1}{\partial x} = 0 & \text{perturbation} \\ & \text{1}^\circ \text{ ordre en } \varepsilon \end{cases}$$

↳ ondes progressives:

$$X_1 = \tilde{X}_1 e^{i(\omega t - kx)} \quad c = \frac{\omega}{k}$$

↳ stabilité temporelle : à $t=0$ $X = X(x)$ ($k \in \mathbb{R} \rightarrow \omega \in \mathbb{C}$)

ω ou c Réel \rightarrow propagation. (S.Hyp)

Complexe \rightarrow instabilité (S.N.Hyp)

\rightarrow solutions de N Triviales

$$(CA - B) \tilde{X}_1 = 0$$

$$\Delta(c) = \det(CA - B) = -\rho_1 \rho_2 h_1 h_2 (\rho_1 h_2 (u_1 - c)^2 + \rho_2 h_1 (u_2 - c)^2 - (\rho_1 - \rho_2) g h_1 h_2)$$

$$\Delta(c) = P_2(c)$$

↳ 2 racines réelles ssi $(u_1 - u_2)^2 \leq g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}{\rho_1 \rho_2}$

$$(u_1 - u_2)^2 \leq g(p_1 - p_2) \frac{p_1 h_2 + p_2 h_1}{p_1 p_2}$$

• Stabilité conditionnelle $\Delta u < \Delta u_{\text{limite}}$
(régimes d'écartement)

— lourd dessous ; léger dessous $p_2 \geq p_1$
très instable (ouf!) (topologie)

— profs de ferron plats ($\equiv g=0$)
→ très instable (effet de la loi topologique)

• Nature Mathématique du système

— Conditionnellement hyperbolique (linéaire^a)

→ conséquences schémas numériques

— précision / stabilisation
— transitoires et états permanents.

MODELISATION DES PERTES DE PRESSION.

- MODÈLE de BASE SIMPLIFIÉ (1D)

- Equilibre / Déséquilibre mécanique

$$v_G = v_L \quad / \quad \sigma_G \neq \sigma_L$$

- Equilibre Thermodynamique

$$h_L = h_{Lsat}(p) \quad h_G = h_{Gsat}(p)$$

- Corrélations spatiales et temporelles $\equiv 1$

$$\overline{f}_g^x = \overline{f}_g^x \quad ; \quad \langle h \rangle = \langle h \rangle \langle k \rangle$$

- BILANS REGISSANT L'ÉCOULEMENT

- Masse du mélange

- q_l de surf du mélange

- Corrélation de taux de vide $R_G = f(x, p, \dots)$

Pas de chgt de phase

$$x = x_0$$

$$T_L = T_G = T_0$$

Chgt de phase

- bilan Enthalpie

$$\rightarrow x(x)$$

EQUATIONS de BILAN du MELANGE.

- Bilan de Masse : $D = \text{cte.}$

$$\frac{d}{dz} (R_G \rho_G w_G + R_L \rho_L w_L) = 0$$

- Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dz} (R_G \rho_G w_G^2 + R_L \rho_L w_L^2) = (R_G \rho_G + R_L \rho_L) F_z$$

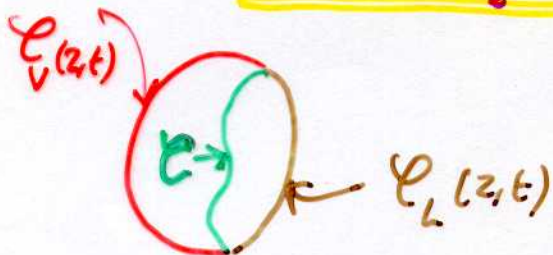
$$- \frac{dp}{dz} + \frac{1}{A} \sum_{k=G,L} \int_{C_k(z,t)} n_z \cdot (n_k \cdot \tau_k) \frac{dV}{n_k \cdot n_k \tau}$$

- Bilan d'enthalpie du Mélange :
(si nécessaire)

$$\frac{d}{dz} \left[R_G \rho_G \left(h_G + \frac{1}{2} w_G^2 \right) + R_L \rho_L \left(h_L + \frac{1}{2} w_L^2 \right) \right] =$$

$$R_G \rho_G F \cdot v_G + R_L \rho_L F \cdot v_L$$

$$- \frac{1}{A} \sum_{k=L,G} \int_{C_k(z,t)} q_h \cdot n_k \frac{dV}{n_k \cdot n_k \tau}$$



F : forces de volume
Gravité par ex.

$$F_z \triangleq F \cdot n_z$$

MODELE HOMOGENE à l'EQUILIBRE THERMO.

Hypothèses :

$$\left. \begin{aligned} \langle \bar{w}_G^x \rangle &= \langle \bar{w}_L^x \rangle = w \\ \langle \bar{h}_G^x \rangle &= h_{vsat}(p) \\ \langle \bar{h}_L^x \rangle &= h_{lsat}(p) \end{aligned} \right\} \equiv 3$$

+ Hypothèses 1D habituelles \rightarrow Modèle à 2 fluides

• bilan de masse

$$\frac{\partial}{\partial t} A\rho + \frac{\partial}{\partial z} A\rho w = 0$$

• bilan de qté de mot.

$$\frac{\partial}{\partial t} A\rho w + \frac{\partial}{\partial z} A\rho w^2 + A \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} Z w + A F_z$$

• bilan d'énergie totale (si nécessaire $\rightarrow x=x_0$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[A\rho \left(e + \frac{1}{2} w^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[A\rho w \left(h + \frac{1}{2} w^2 \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \Phi + A F_w$$

\Rightarrow Flashing ; section variable , tube long
chauffage en paroi

⇒ Bilan de qdm du mélange: ($w > 0!$)

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{d}{dz}(\rho w^2) + \rho F_z - \frac{P}{A} \tau_w$$

↳ Variation de Pression d'accélération.

↳ Gradient de P. Hydrostatique

↳ Perte de P. frottement

$$\frac{dp}{dz} = \left(\frac{dp}{dz}\right)_A + \left(\frac{dp}{dz}\right)_G + \left(\frac{dp}{dz}\right)_F$$

• METHODOLOGIE Expérimentale (Corrélations)

$$\frac{dp}{dz} \text{ seul} \quad \frac{dp}{dz} \text{ et } R_G \text{ mesurés}$$

⇒ Reconstitution par un modèle ⇒ $\left(\frac{dp}{dz}\right)_F$

△ Utiliser la corrélation de PdlP par frottement dans le même environnement théorique

R_G mesuré ou R_G prédit (m² modèle)

MODELE HOMOGENE Frottement Parietal.

$$\left(\frac{d\Delta}{dz}\right)_f = -\tau_w \frac{P}{A} = -\tau_w \frac{4}{D_h}$$

Coefficient de frottement C_f : $C_f \triangleq \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho w^2}$

1) libre ~ 1 ($\alpha \sim 1$) D.A.F. $C_f = 0,005$
 libre ~ 0 ($\alpha \sim 0$) Autoimpression $C_f = 0,003$

2) $x \ll 1$ $C_f = C_{f_L}(1\phi)$ $M_L = M_L + M_G$

$x \sim 1$ $C_f = C_{f_G}(1\phi)$ $M_G = M_L + M_G$

3) Poiseuille ($16/Re$) Blasius ($0,079 Re^{-0,25}$) C_f

$$- Re = \frac{GD}{\mu} \quad G \triangleq \frac{M}{A} = \frac{M_L + M_G}{A}$$

- Viscosité Equivalente (pas de zero physique)

- Dukler (1964) $\mu = \beta \mu_G + (1-\beta) \mu_L$

- Ishii-Zuber : viscosité des dispersions (1978)

$$\frac{\mu}{\mu_c} = \left(1 - \frac{d_d}{d_{dm}}\right)^{2,5} \frac{(\mu_d + 0,4\mu_c)}{(\mu_d + \mu_c)}$$

d : dispersé c : continue

MODELES à DEUX FLUIDES EVOLUTION IMPOSEE

• bilan de Masse

$$G = \text{cte}$$

• bilan de q d m (mélange)

$$G^2 \frac{d}{dz} \left[\frac{\alpha^2}{R_G \rho_G} + \frac{(1-\alpha)^2}{(1-R_G) \rho_L} \right] = (R_G \rho_G + (1-R_G) \rho_L) F_z$$

$R_G \neq \beta \uparrow !$

$$- \frac{d\Gamma}{dz} + \left(\frac{d\Gamma}{dz} \right)_F$$

• bilan d'énergie

$$G \frac{d}{dz} [\alpha h_G + (1-\alpha) h_L] = \frac{4\phi}{D} \quad \phi: \text{densité de flux}$$

EVOLUTION

→ déséquilibre mécanique ($R_G \neq \beta !$)

$$R_G = f(\alpha, \Gamma, \dots)$$

→ Equilibre thermodynamique

$$h_G = h_{\text{sat}}(p) \quad h_L = h_{L, \text{sat}}(p)$$

Écoulement avec chauffage : $\alpha \leftarrow$ bilan d'énergie

adiabatique $\alpha = \text{cte}$ (paramètre)

CORRELATION DE LOOKHART MARTINELLI EC à 2 COMPOSANTS

Ex: eau - air (basse pression).

Exp: Hor; $\Delta P_{f, max}$
 α : R_G $Q_{GV, max}$

Multiplicateur diphasique : ϕ .

Même tube: 3eq

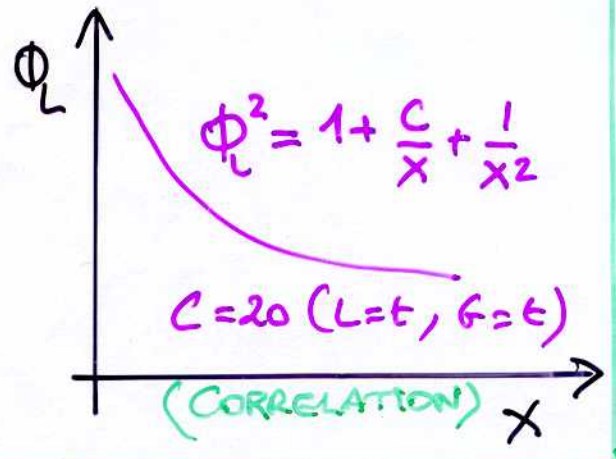
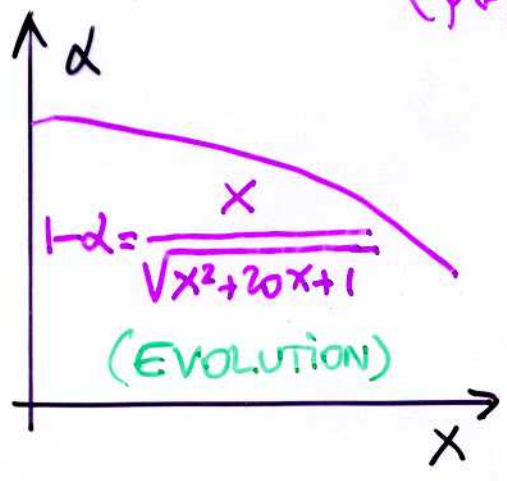
	①	②	③
situation:	diphasique	Gaz Seul	liquide seul.
débit:	$M = M_G + M_L$	M_G	M_L
$\left(\frac{dp}{dz}\right)_F$:	$\left(\frac{dp}{dz}\right)$	$\left(\frac{dp}{dz}\right)_G$	$\left(\frac{dp}{dz}\right)_L$

Définitions

$$\phi_G^2 \triangleq \frac{dp/dz}{(dp/dz)_G} ; \quad \phi_L^2 \triangleq \frac{dp/dz}{(dp/dz)_L} ; \quad X^2 = \frac{\phi_G^2 (dp/dz)_L}{\phi_L^2 (dp/dz)_G}$$

⇒ Blasius ($C_f = 0,046 Re^{-0,2}$)

$$X = \left(\frac{\mu_L}{\mu_G}\right)^{0,1} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{0,9} \left(\frac{\rho_G}{\rho_L}\right)^{0,5}$$



CORRELATION de MARTINELLI - NELSON : EC. EAU / VAPEUR

• Expérience: Tubes $\varnothing 20$ $\Delta P = \Delta P_{acc} + \Delta P_f$ R_{G3} non mes

situations: diphasique
eau - vapeur

liquide
seul (eau)

débits:

M

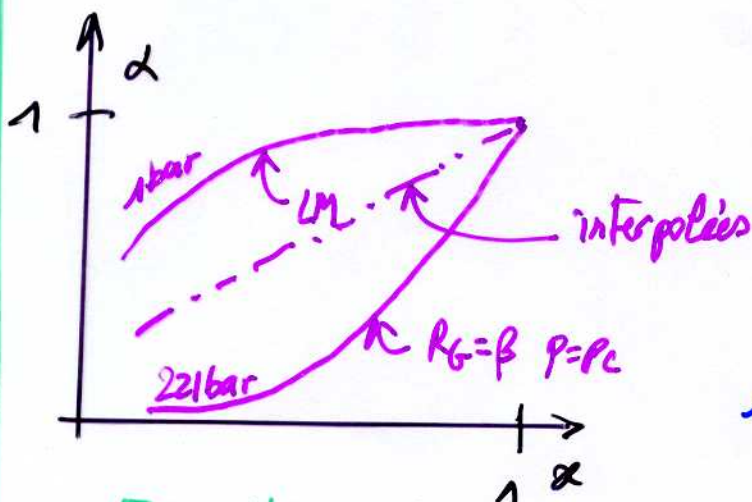
$M_L = M$

$$\phi_{f0}^2 = \frac{dp/dz}{(dp/dz)_{f0}}$$

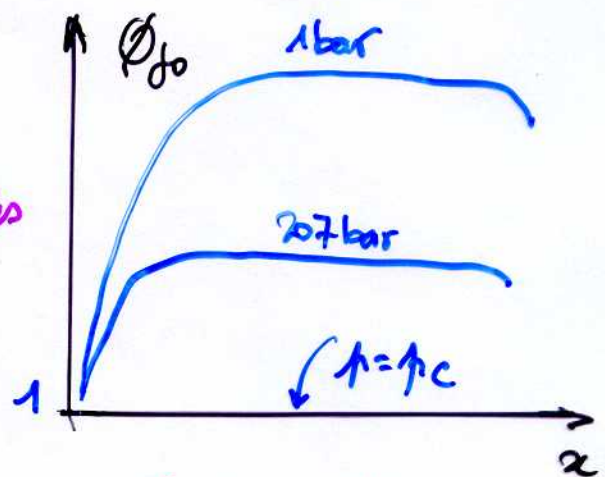
$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_f$$

$$\frac{dp}{dz}$$

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{f0}$$



EQ. d'EVOLUTION



CORRELATION
(FERMETUR)

• THOM $\rightarrow \int_0^z$

• Autres fluides + effet de vitesse : BAROCZY.

EXEMPLE de CORRELATION
INDUSTRIELLE issue de BDD
La corrélation de Friedel

- Même Multiplicateur que M-N

Ou donne
 x et M .

$$\phi_{Lo}^2 = \frac{(d_f/d_z)_+}{(d_f/d_z)_{f0}}$$

+ ρ_{pply}

- $\rho_H = \left(\frac{x}{\rho_G} + \frac{1-x}{\rho_L} \right)^{-1}$

- $We \triangleq \frac{G^2 d}{\sigma \rho_H}$; $Fr \triangleq \frac{G^2}{g d \rho_H^2}$

- $H = \left(\frac{\rho_L}{\rho_G} \right)^{0,01} \left(\frac{\mu_G}{\mu_L} \right)^{0,19} \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho_L} \right)^{0,7}$

- $F = x^{0,778} (1-x)^{0,224}$

- $C_{f90} = C_f$ calculé avec gaz seul $M_G = M$

- $C_{f10} = C_f$ calculé avec liquide seul $M_L = M$

- $E = (1-x)^2 + x^2 \frac{\rho_L C_{f90}}{\rho_G C_{f10}}$

$$\phi_{Lo}^2 = E + \frac{3,24 FH}{Fr^{0,045} We^{0,035}}$$

EXERCICES : Parts de Pression.

- Calculer $\Delta p = p_2 - p_1$ dans une conduite parcourue par un écoulement vertical ascendant par plusieurs méthodes. Discuter.

Propriétés physiques :

$$\mu_L = 0,001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_G = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

à 1 bar 20°C

$$\rho_G = 1,293 \text{ kg/m}^3$$

à 1 bar 0°C

$$\sigma_{\text{eau-air}} = 0,072 \text{ N/m}$$

à 20°C

- Δ. Calculer pour chaque cas les différents composants du ΔP en négligeant ΔP_{acc} que l'on pourra estimer après coup.

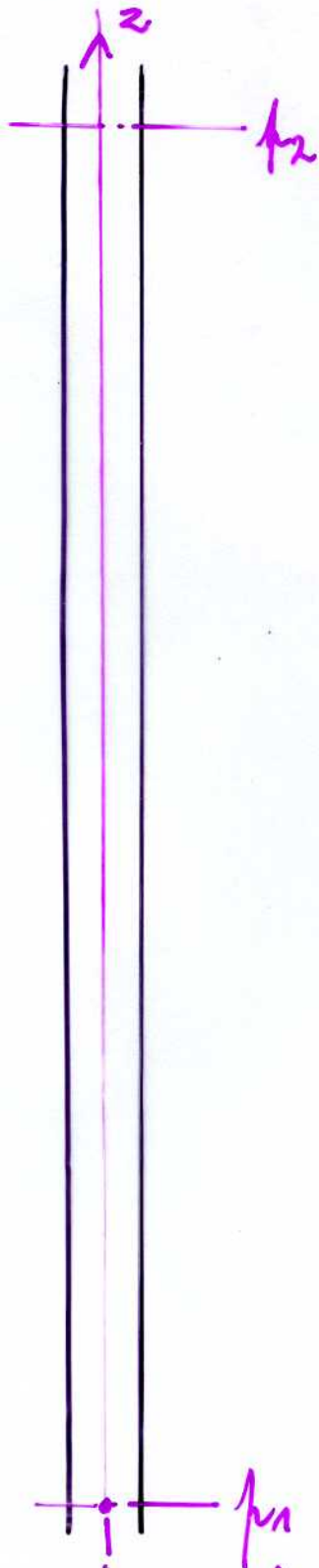
Conditions:

$$Q_L = 30 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$Q_G = 5 \text{ m}^3/\text{h} \text{ à } 5 \text{ bar et } 20^\circ\text{C}$$

$$\rightarrow p_1 = 5 \text{ bar}$$

$$T_1 = 20^\circ\text{C}$$



SUDDEN EXPANSION AND CONTRACTION

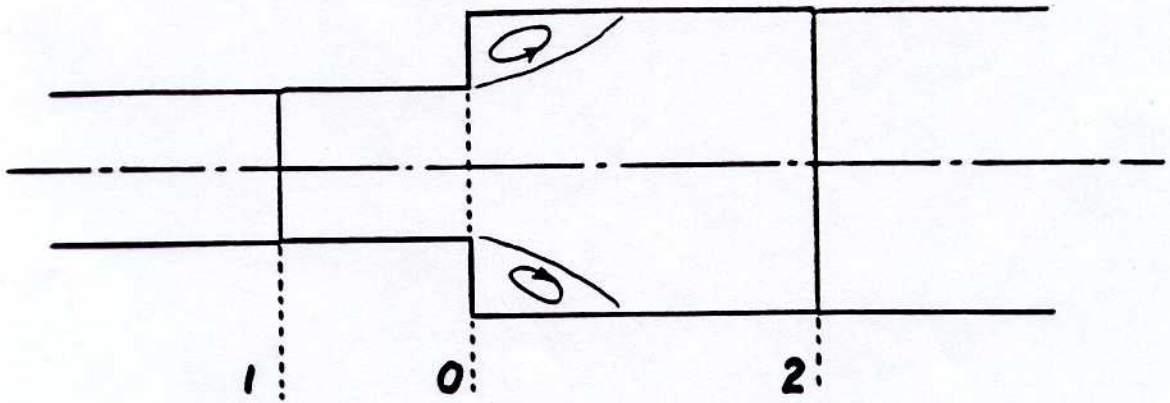
- SUDDEN EXPANSION
 - Single phase flow
 - Two-phase flow

- SUDDEN CONTRACTION
 - Single phase flow
 - Two-phase flow

SUDDEN EXPANSION

Single phase

pp. 124-135



1. Mass and momentum balances:

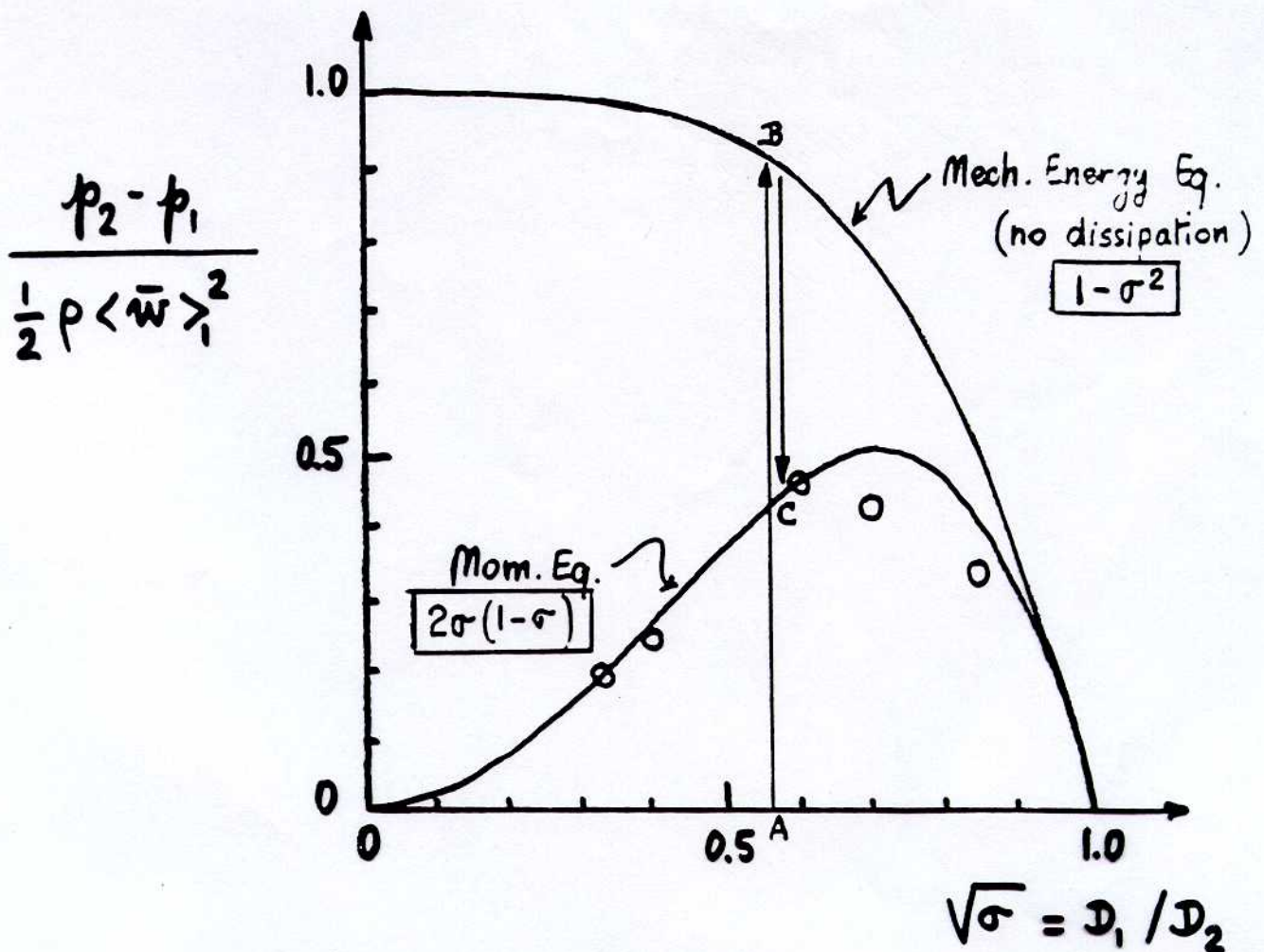
$$\frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho \langle \bar{w} \rangle_1^2} = 2\sigma(1 - \sigma) \quad \sigma \triangleq \frac{a_1}{a_2} < 1 \quad \text{Eq. 4.36}$$

- negligible frictional effects on the pipe WALL
- $\langle \bar{p} \rangle_0 = \langle \bar{p} \rangle_1$
- flat profiles

2. Mass balance and mechanical energy equation:

$$\frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2} \rho \langle \bar{w} \rangle_1^2} = 1 - \sigma^2 \quad \text{Eq. 4.57}$$

- negligible viscous dissipation within the control VOLUME
- flat profiles



o Experimental data (ARCHER, 1913)

Reversible pressure **increase** due to the area change only:

$$\frac{(p_2 - p_1)_R}{\frac{1}{2} \rho \langle \bar{w} \rangle_1^2} = 1 - \sigma^2 \quad (\text{AB}) \quad \boxed{\text{Eq. 4.60}}$$

Irreversible pressure **drop** due to the viscous dissipation:

$$\frac{(p_2 - p_1)_I}{\frac{1}{2} \rho \langle \bar{w} \rangle_1^2} = - (1 - \sigma)^2 \quad (\text{BC}) \quad \boxed{\text{Eq. 4.63}}$$

SUDDEN EXPANSION

Two-phase

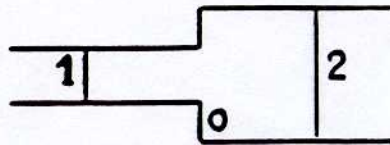
pp. 138-139

Mass and momentum balances \rightarrow ROMIE's equation:

$$p_2 - p_1 = \sigma G_1^2 \left\{ \left[\frac{(1-x_1)^2}{(1-R_{G1})\rho_L} + \frac{x_1^2}{R_{G1}\rho_G} \right] - \sigma \left[\frac{(1-x_2)^2}{(1-R_{G2})\rho_L} + \frac{x_2^2}{R_{G2}\rho_G} \right] \right\}$$

Eq. 4.72

If $x_1 \equiv x_2 \triangleq x$
 $R_{G1} \equiv R_{G2} \triangleq R_G$



$$p_2 - p_1 = \sigma(1-\sigma) G_1^2 \left[\frac{(1-x)^2}{(1-R_G)\rho_L} + \frac{x^2}{R_G\rho_G} \right]$$

Eq. 4.75

- negligible frictional effects on the pipe WALL
- $\langle \bar{p} \rangle_0 = \langle \bar{p} \rangle_1$
- flat profiles

Mass balance and mechanical energy equation without viscous dissipation \rightarrow REVERSIBLE PRESSURE DROP $(p_2 - p_1)_R$

$$(p_2 - p_1)_I = (p_2 - p_1) - (p_2 - p_1)_R$$

See Eq. 4.87

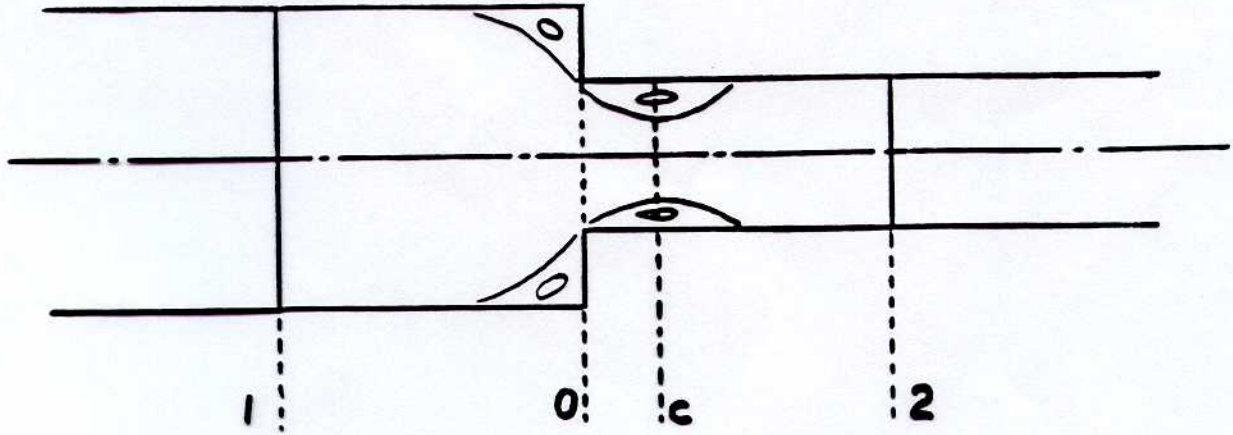
• Romie's equation checked in:

- steam-water (measured void fractions): Ferrel & McGee (1966)
- freon-freon vapor (calculated void fractions): Weisman et al. (1978)

SUDDEN CONTRACTION

Single phase

pp. 139 - 142



1. Mass and momentum balances :

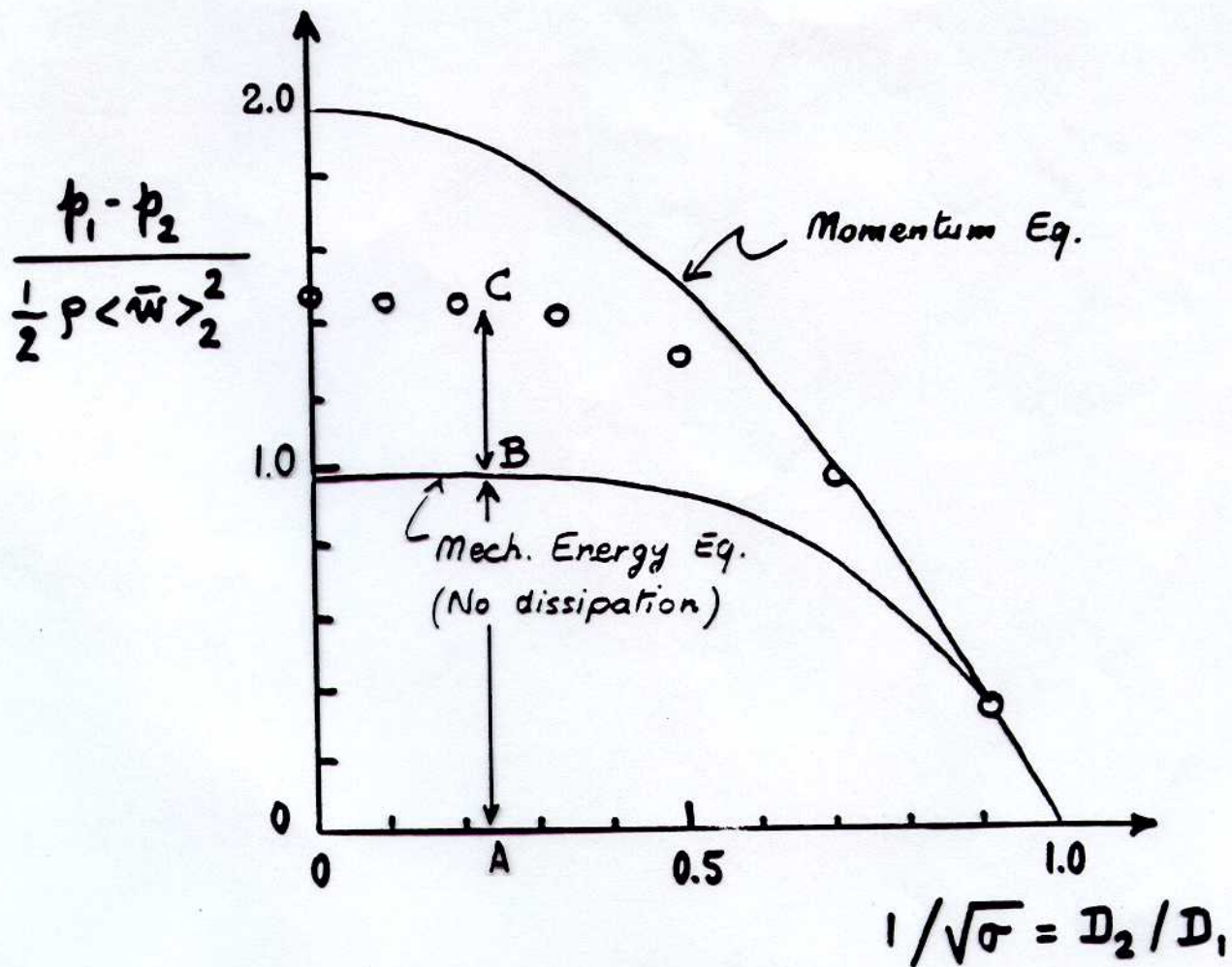
$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2} \rho \langle \bar{w} \rangle_2^2} = 2 \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \quad \sigma \triangleq \frac{a_1}{a_2} > 1 \quad \text{Eq. 4.94}$$

- negligible frictional effects on the pipe WALL.
- $\langle \bar{p} \rangle_0 = \langle \bar{p} \rangle_1$
- flat profiles

2. Mass balance and mechanical energy equation :

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2} \rho \langle \bar{w} \rangle_2^2} = 1 - \frac{1}{\sigma^2} \quad \text{Eq. 4.96}$$

- negligible viscous dissipation within the control VOLUME
- flat profiles



Irreversible pressure drop due to a sudden expansion between c and 2

$$\frac{(p_1 - p_2)_I}{\frac{1}{2} \rho \langle \bar{w} \rangle_c^2} = (1 - \sigma_c)^2 \quad \sigma_c \triangleq \frac{a_c}{a_2} \quad \boxed{\text{Eqs. 4.98 \& 4.9}}$$

$$\text{or: } \frac{(p_1 - p_2)_I}{\frac{1}{2} \rho \langle \bar{w} \rangle_2^2} = \left(\frac{1}{\sigma_c} - 1 \right)^2 \quad (\text{BC}) \quad \boxed{\text{Eq. 4.100}}$$

Reversible pressure drop due to the area change only:

$$\frac{(p_1 - p_2)_R}{\frac{1}{2} \rho \langle \bar{w} \rangle_2^2} = 1 - \frac{1}{\sigma^2} \quad (\text{AB}) \quad \boxed{\text{Eq. 4.101}}$$

$$\text{Actual pressure drop: } \frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2} \rho \langle \bar{w} \rangle_2^2} = 1 - \frac{1}{\sigma^2} + \left(\frac{1}{\sigma_c} - 1 \right)^2 \quad \boxed{\text{Eq. 4.102}}$$

(AC = AB + BC)

$$\text{Figure } \Rightarrow \sigma_c = f(\sigma)$$

SUDDEN CONTRACTION**Two-phase**

p. 143

Homogeneous model:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\sigma^2} + \left(\frac{1}{\sigma_c} - 1 \right)^2 \right] G^2 \left(\frac{x}{\rho_G} + \frac{1-x}{\rho_L} \right)$$

Eq. 4.104

Confirmed by experiments:

Steam-water: Ferrel & McGee (1966), Geiger & Rohner (1966)

Freon-freon vapor: Weisman et al. (1978)