

# UNE INTRODUCTION AUX ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES

Les équations de bilan  
des écoulements diphasiques

HERVE LEMONNIER

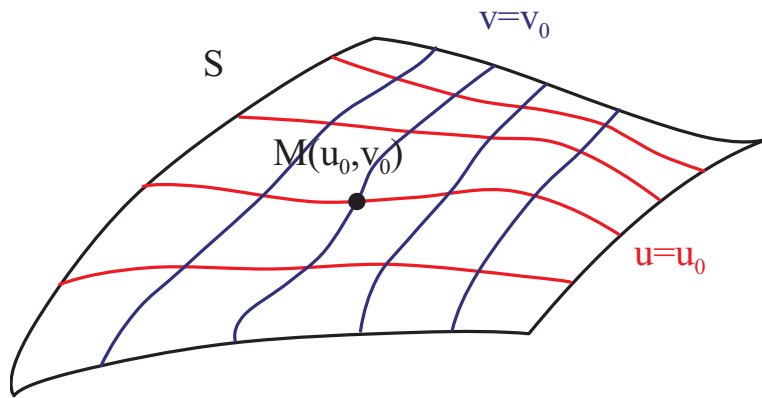
DTN/SE2T, CEA/Grenoble, 38054 Grenoble Cedex 9  
Tél. 04 38 78 45 40, *herve.lemonnier@cea.fr*

INSTN, décembre 2009

# ETABLISSEMENT DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

1. Principes fondamentaux (4+1)
  - La règle de Leibniz et le théorème de Gauss.
  - Volumes matériels et arbitraires.
2. Equations de bilan locales et instantanées monophasiques. Le problème de fermeture (I).
  - Volume fixe avec une interface (surface de discontinuité).
3. Equations de bilan locales et instantanées de chaque phase et à l'interface.
  - Moyenne sur la section : les modèles 1D.
  - Moyenne temporelle : CMFD, modèles 3D (à la Reynolds).
  - Moyennes composites T/E : le modèle à deux fluides.
4. Le problème de fermeture (II).

# OUTILS MATHÉMATIQUES



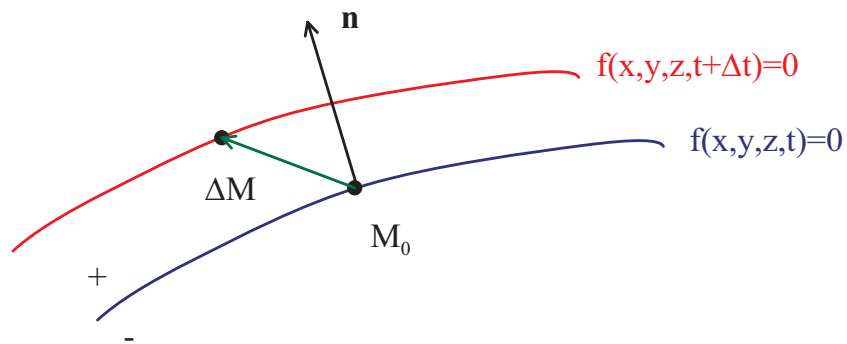
- Vitesse de déplacement d'une surface  $S$  :

$$\mathbf{v}_S \triangleq \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right)_{u,v}$$

- Dépend du paramétrage.

- Equation implicite :  $f(x, y, z, t) \leq 0$ , dans  $V$ ,

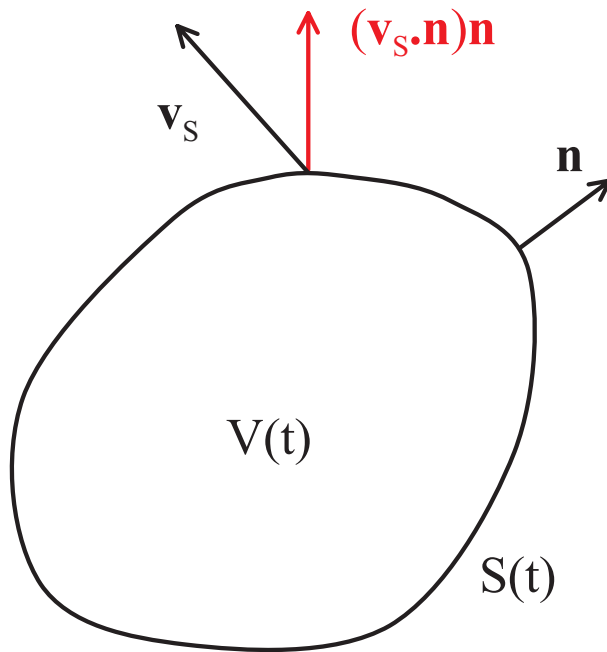
$$f(x, y, z, t + \Delta t) = f(x_0, y_0, z_0, t) + \nabla f(M_0) \cdot \Delta M + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \dots$$



- Vitesse de déplacement géométrique (intrinsèque) :

$$\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\nabla f|}$$

# RÈGLE DE LEIBNIZ



- Extension de la règle de dérivation sous le signe somme :

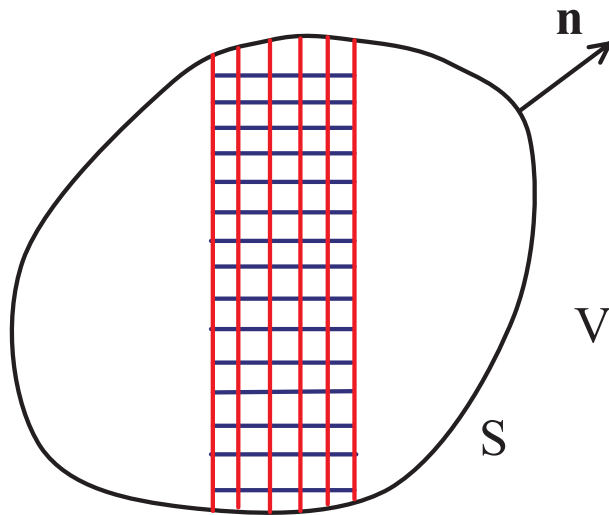
$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S(t)} f \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} dS$$

- Théorème géométrique,  $S$  quelconque.
- $\mathbf{n}$ , toujours dirigé vers l'extérieur.
- Usage 1 : commutation intégration espace-dérivation en temps,
- Usage 2 : énoncé des principes sur un volume matériel ou quelconque.

# THÉORÈME DE GAUSS

- Divergence : flux par unité de volume :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} \triangleq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V_\epsilon} \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dS$$



- Théorème de la divergence, Gauss-Ostrogradski (Green) :

$$\int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dS$$

- Théorème géométrique,  $S$  et  $V$  quelconques,  $\mathbf{n}$  et  $\nabla$  du même côté.  $\mathbf{n}$ , pointant vers extérieur.  $\mathbf{B}$  tenseur quelconque.
- Usage : certaines intégrales de volume  $\Leftrightarrow$  intégrales de surface.

# VOLUMES MATERIELS ET VOLUMES ARBITRAIRES

- Un volume matériel en MMC est un système fermé pour la thermodynamique.
- Soit  $V_m(t)$ , limité par  $S_m(t)$ , un volume matériel,  $\mathbf{v}_{S_m} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ , par définition.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f \, dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, dV + \int_{S_m(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

- Soit  $V(t)$  arbitraire qui coïncide avec  $V_m(t)$  à l'instant  $t$ .

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f \, dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, dV + \int_{S(t)} f \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} \, dS$$

- Identité (1) : quelque soit  $V(t)$  qui coïncide avec  $V_m(t)$  à  $t$ ,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f \, dV = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} f \, dV + \int_{S(t)} f (\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n} \, dS} \quad (1)$$

# EXEMPLE : LE BILAN DE MASSE

- Énoncé du principe : la masse d'un volume matériel est constante.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0$$

- Identité (1) avec  $f = \rho$ ,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV}_{\text{Masse de } V, m} + \underbrace{\int_{S(t)} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{Flux net quittant } S, M} = 0$$

- Autre énoncé : la variation de la masse,  $m$ , de  $V$  (quelconque) égale le flux entrant,  $-M$ .

$$\frac{dm}{dt} + M = 0, \quad \frac{dm}{dt} = -M$$

- Les principes fondamentaux s'expriment sur des volumes matériels ou arbitraires. Ces énoncés sont **équivalents**.

# LE BILAN DE MASSE

- La variation de la masse du volume  $V$  égale le débit masse *entrant* par sa surface  $S$  ( $\forall V$ )

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2)$$

- Cas particuliers,
  - Le volume est fixe,  $\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} = 0$ ,
  - Pour un volume matériel,  $\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$



# BILAN (DE MASSE) DES ESPECES

- La variation de la masse du composant  $\alpha$  contenue dans  $V$  (quelconque) égale (i) le débit masse de  $\alpha$  entrant à travers  $S$  et (ii) la production dans le volume  $V$  ( $\forall V$ ).

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_\alpha dV = - \int_S \rho_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V r_\alpha dV$$

- Le bilan de masse du mélange est la somme sur  $\alpha$  des bilans des espèces.
- $\sum_\alpha r_\alpha = 0$ .
- Production : redistribution, pas de création de masse nette.

# BILAN DE QUANTITE DE MOUVEMENT

- La variation de la quantité de mouvement de  $V$  (quelconque) égale (i) le débit de qdm entrant à travers la surface  $S$  et (ii) les forces appliquées ( $\forall V$ ).

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbb{T} dS + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (3)$$

- $\mathbb{T}$  : Tenseur des contraintes,  $\mathbf{F}_S = \mathbf{n} \cdot \mathbb{T}$ .
- $\mathbf{g}$  : Forces de volume, par unité de masse.
- NB : le bilan de qdm est une équation vectorielle.

# BILAN DU MOMENT DE QUANTITE DE MVT

- La variation du moment de la qdm de  $V$  (quelconque) égale (i) le débit de moment de qdm entrant à travers  $S$  et (ii) couples appliqués ( $\forall V$ ).

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = - \int_S \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbb{T}) dS + \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV \quad (4)$$

- Lorsque les couples appliqués sont les moments des forces appliquées (fluides non polaires). Si 2 propositions sont vraies, la troisième aussi,
  - Le tenseur des contraintes est symétrique.
  - Le bilan de quantité de mouvement est vérifié.
  - Le bilan du moment de la quantité de mouvement est vérifié.

# BILAN D'ENERGIE (TOTALE)

- Enoncé du premier principe. La variation de l'énergie interne d'un système fermé égale (i) la puissance des efforts appliqués et (ii) la puissance thermique *fournie* au système.
- La variation de l'énergie totale (interne et mécanique) de  $V$  (quelconque) égale la somme (i) de débit d'énergie totale entrant à travers sa surface, (ii) la puissance des efforts appliqués, (iii) la puissance thermique *apportée* ( $\forall V$ ).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = & - \int_S \rho \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V q''' dV \end{aligned} \quad (5)$$

- $q'''$ : sources volumiques de chaleur (effet Joule, absorption rayonnement, *etc.*).  
**Exclure** : celles d'origine thermodynamique, chaleur de réaction, transition de phase de tout ordre (EOS)...
- L'évolution est réversible ou irréversible.

# SECOND PRINCIPE ET BILAN D'ENTROPIE

- Enoncé du second principe : la variation d'entropie d'un système fermé et isolé ne peut que croître.
- La variation d'entropie du volume  $V$  égale la somme (i) du débit d'entropie entrant à travers sa surface, (ii) de l'entropie apportée au système de manière réversible, (iii) des sources d'entropie. ( $\forall V$ ).

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s \, dV = - \int_S \rho s (\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_s \, dS + \int_V \frac{q'''}{T} \, dV + \int_V \sigma \, dV, \quad (6)$$
$$\sigma \geq 0.$$

- Dans ce cadre, le second principe est "seulement",  $\sigma \geq 0$ .
- Par définition, évolution réversible,  $\sigma = 0$ .

# EQUATION DE BILAN GENERALISEE

Les équations de bilan ont une forme analogue,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \psi dV = - \int_S \mathbf{n} \cdot \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \psi dS - \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\psi dS + \int_V \phi_\psi dV.$$

Bilan	$\psi$	$\mathbf{j}_\psi$	$\phi_\psi$
Masse	1		
Espèces $\alpha$	$\omega_\alpha$	$\mathbf{j}_\alpha$	$r_\alpha$
Q. de mouvement	$\mathbf{v}$	$-\mathbb{T}$	$\rho \mathbf{g}$
Moment QDM	$\mathbf{r} \times \mathbf{v}$	$-\mathbb{T} \cdot \mathbb{R}^{(*)}$	$\mathbf{r} \times \rho \mathbf{g}$
Energie totale	$u + \frac{1}{2} v^2$	$\mathbf{q} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{v}$	$\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + q'''$
Entropie	$s$	$\mathbf{j}_s$	$\sigma + \frac{q'''}{T}$

$$(*)\mathbb{R}, R_{ij} = \epsilon_{ijk} r_k$$

# EQUATIONS LOCALES PRIMAIRES

Règle de Leibniz,

$$\int_V \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} dV = - \int_S \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} \psi dS - \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\psi dS + \int_V \phi_\psi dV.$$

Théorème de Gauss,  $\forall V \subset D_f$ ,

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \psi) + \nabla \cdot \mathbf{j}_\psi - \phi_\psi \right] dV = 0$$

Equations de bilan locale et instantanées, dites *primaires*,

$$\boxed{\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} = \underbrace{-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \psi)}_{\text{Convection}} \underbrace{-\nabla \cdot \mathbf{j}_\psi}_{\text{Diffusion}} \underbrace{+\phi_\psi}_{\text{Source}}}$$

Bilan sur un volume fixe infinitesimal, **strictement équivalent** aux principes fondamentaux.

# FLUX TOTAL

Forme dite des flux totaux ([Bird et al. , 2007](#)), écoulements stationnaires.

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\psi}^t + \phi_{\psi}$$

Bilan	flux total	flux convectif	flux diffusif
	$\mathbf{j}_{\psi}^t$	$\rho \psi \mathbf{v}$	$\mathbf{j}_{\psi}$
Mass	$\mathbf{n} =$	$\rho \mathbf{v}$	
Species	$\mathbf{n}_{\alpha} =$	$\rho \omega_{\alpha} \mathbf{v}$	$\mathbf{j}_{\alpha}$
Momentum	$\phi =$	$\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$	$-\mathbb{T}$
Total energy	$\mathbf{e} =$	$\rho \mathbf{v} \left( u + \frac{1}{2} v^2 \right)$	$\mathbf{q} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{v}$
Entropy	$\mathbf{j}_s^t =$	$\rho s \mathbf{v}$	$\mathbf{j}_s$

NB: Certains auteurs utilisent des conventions de signe différentes pour les flux diffusifs : ”pêche aux équations” interdite...



# FORME CONVECTIVE

Combinaison avec le bilan de masse,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

Développer les produits,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \psi) - \nabla \cdot \mathbf{j}_\psi + \phi_\psi \\ \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\psi \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \psi - \nabla \cdot \mathbf{j}_\psi + \phi_\psi \end{aligned}$$

Définition de la dérivée convective:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$$

$$\boxed{\rho \frac{D\psi}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\psi + \phi_\psi}$$

Bilan sur un volume matériel infinitésimal. Seulement les flux diffusifs. Utile pour les équations secondaires.

# ORGANIGRAMME DES EQS DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Pour un fluide pur, volume de contrôle arbitraire,

- Bilan de masse (2)
- Bilan de quantité de mouvement (3)
- Bilan du moment de la qdm (4)
- Bilan d'énergie totale (5)
- Inégalité entropique (6)

Equations de bilan locales et instantanées primaires,

(2) → Bilan de masse (7)

(3) → Bilan de quantité de mouvement (8)

(4) → Symétrie du tenseur des contraintes

(5) → Bilan d'énergie totale (9)

(7) → Inégalité entropique (10)

# EQUATIONS LOCALES INSTANTANÉES PRIMAIRES

- Rappel de la forme générale :

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \psi) + \nabla \cdot \mathbf{j}_\psi - \phi_\psi = 0$$

- $\psi$ , quantité transportée,  $\mathbf{j}_\psi$ , flux diffusif,  $\phi_\psi$ , sources volumiques.

Bilan	$\psi$	$\mathbf{j}_\psi$	$\phi_\psi$
Masse (7)	1		
Esp. $\alpha$	$\omega_\alpha$	$\mathbf{j}_\alpha$	$r_\alpha$
Q. de mouvement (8)	$\mathbf{v}$	$-\mathbb{T}$	$\rho \mathbf{g}$
Energie totale (9)	$u + \frac{1}{2} v^2$	$\mathbf{q} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{v}$	$\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + q'''$
Entropie (10)	$s$	$\mathbf{j}_s$	$\sigma + \frac{q'''}{T}$

# EQUATIONS DE LA MMC (SUITE)

Equations de bilans dites *secondaires*, pour un fluide pur,

- Bilan d'énergie mécanique, (11)  $\cdot \mathbf{v}$  bilan de qdm.
- Bilan d'énergie interne (12), bilan d'énergie totale (9)-(11).
- Bilan d'enthalpie (13). (12),  $h \triangleq u + p/\rho$
- Bilan d'entropie (14), (11),  $du = Tds - pdv$  (Gibbs).
- (14) comparé avec l'inégalité entropique (9), fournit  $\mathbf{j}_s$  and  $\sigma$ .

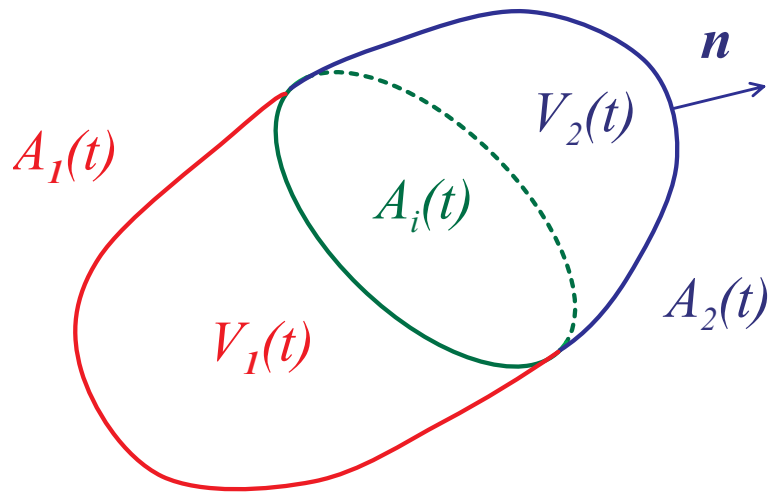
# LE PROBLEME DE FERMETURE (I)

- Dans équations de bilan,
  - Variables locales,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_\alpha$ ,  $p$ ,  $u$ , etc.
  - Flux inconnus,  $\mathbf{j}_\alpha$ ,  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{j}_s$ . NB:  $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{V}$
  - Sources inconnues,  $r_\alpha$ ,  $\sigma$ .
- Les principes fondamentaux ne fournissent aucune expression pour ces flux.  
**Les équations de la MMC ne sont pas fermées.**
- Une interprétation du second principe,
  - Fournit les sources d'entropie. Pour un fluide pur,  $T\sigma = \mathbf{q} \cdot \nabla T + \mathbb{V} : \nabla \mathbf{v}$ .
  - Fournit les conditions d'équilibre thermodynamique,  $\sigma = 0$ ,
  - Contraint les fermetures pour assurer le retour à l'équilibre. Hypothèse de linéarité, propriétés de transport,

$$\mathbb{T} = \mu(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) + (\zeta - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \mathbf{v}\mathbb{I}, \quad \mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad \mu, \zeta, \kappa \geq 0$$

- les propriétés de transport doivent être mesurées ou modélisées en dehors de la MMC.

# EQUATIONS DE BILAN DIPHASIQUES



- Exemple : bilan de masse,  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $A = A_1 \cup A_2$  fixes. Interfaces : zones de discontinuité.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \forall V$$

- Contributions  $V_1$  et  $V_2$ , pour  $V_1$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_1} \rho dV + \frac{d}{dt} \int_{V_2} \rho dV = - \int_{A_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{A_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

- Règle de Leibniz,  $V_1(t)$  mobile :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_1} \rho_1 dV = \int_{V_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} dV + \int_{A_i(t)} \rho_1 \mathbf{v}_{A_i} \cdot \mathbf{n}_1 dA$$

- Théorème de Gauss :

$$\int_{A_1} \rho \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS = \int_{V_1} \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_1) dV - \int_{A_i} \rho_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} dA$$

- Même procédure pour  $V_2$ , somme des deux contributions,

# BILAN DE MASSE DIPHASIQUE

- Somme des contributions,  $\forall V$ ,

$$\sum_{k=1}^2 \int_{V_k} \left( \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) \right) dV - \int_{A_i} (\rho_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i) + \rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_i)) dA = 0$$

- Bilan de masse local,  $k = 1, 2$ , en tous points de  $V_k$  (EDP),

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) = 0$$

- En tous points de l'interface, relation de saut,

$$\underbrace{\rho_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_1}_{\dot{m}_1} + \underbrace{\rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_2}_{\dot{m}_2} = 0$$

- Bilan de masse de l'interface,  $\dot{m}_k = \rho_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_k$ .

# FORME GÉNÉRALE DES BILANS

- Même démonstration pour tous les bilans,  $\forall V$

$$\sum_{k=1}^2 \int_{V_k} \left( \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot (\mathbf{j}_{\psi k}) - \phi_k \right) dV$$
$$- \int_{A_i} \sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{j}_{\psi k} + \phi_i) dA = 0$$

- En tous points de chaque phase,

$$\frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot (\mathbf{j}_{\psi k}) - \phi_k = 0$$

- En tous points de l'interface,

$$\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{j}_{\psi k} + \phi_i) = 0$$

- $\phi_i$  : source d'entropie à l'interface.



# BILANS LOCAUX INSTANTANÉS

- Bilan de masse,

$$\rho_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_1 + \rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0$$

- Pas de changement de phase :  $\dot{m}_k = 0$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 0$$

- On admet : pas de glissement à l'interface ( $\phi_i = 0$ )

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \quad (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$$

# BILANS AUX INTERFACES

- Bilan de quantité de mouvement,

$$\dot{m}_1 \mathbf{v}_1 + \dot{m}_2 \mathbf{v}_2 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{T}_1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{T}_2 = 0$$

- Cas particulier, pas de viscosité,  $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{V}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^t + \mathbf{v}^n$ ,  $\mathbf{v}^n = \mathbf{n}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ ,

$$\begin{cases} \dot{m}_1(\mathbf{v}_1^n - \mathbf{v}_2^n) + (p_1 - p_2)\mathbf{n}_1 = 0 \\ \mathbf{v}_1^t = \mathbf{v}_2^t \end{cases}$$

- Cas général,

$$\dot{m}_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (p_1 - p_2)\mathbf{n}_1 - (\mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2) \cdot \mathbf{n}_1 = 0$$

# BILANS AUX INTERFACES

- Cas particulier : 1D,  $\mathbf{v}_k(x) \perp$  interface

$$\perp : \quad \dot{m}_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}_1 + (p_1 - p_2) - \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2) \cdot \mathbf{n}_1 = 0$$

- 1D incompressible,  $\frac{dv_k}{dx} = 0 \Rightarrow \mathbb{V}_k = 0$ ,

$$\dot{m}_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}_1 + (p_1 - p_2) = 0$$

- Bilan de masse, définition :  $\dot{m}_k = \rho_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_k$ ,

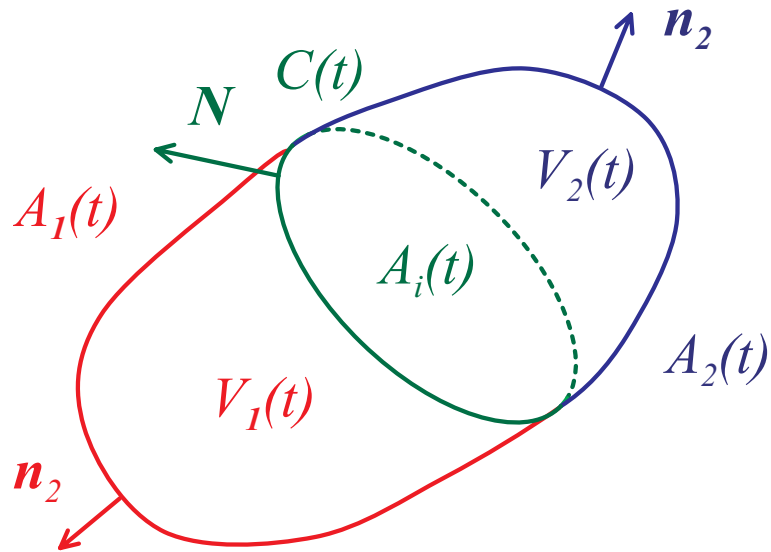
$$\dot{m}_1 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}_1$$

- A l'interface, saut de pression, force de recul,

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \dot{m}_1^2.$$

- $p_1 - p_2 \propto \rho_1 - \rho_2$  pour  $\dot{m}_1 \ll 0$ .

# PRISE EN COMPTE DE LA TENSION DE SURFACE



- Bilan de quantité de mouvement. Forces :

$$= \int_{C(t)} \sigma \mathbf{N} dl + \int_{A_1 \cup A_2} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k dS + \int_{V_1 \cup V_2} \rho_k \mathbf{F}_k dV.$$

- Théorème de Gauss [Arise \(1962\)](#), [Delhaye \(1974\)](#) :

$$\int_{C(t)} \sigma \mathbf{N} dl = \int_{A_i(t)} (\nabla_S \sigma - \mathbf{n} \sigma \nabla_S \cdot \mathbf{n}) dS$$

- $\nabla_S$  : gradient de surface,  $\nabla_S \cdot$  : divergence de surface. Bilan de quantité de mouvement à l'interface :

$$\dot{m}_1 \mathbf{v}_1 + \dot{m}_2 \mathbf{v}_2 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{T}_1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{T}_2 = -\nabla_S \sigma + \mathbf{n} \sigma \nabla_S \cdot \mathbf{n}$$

- $\nabla_S \sigma$  : effet Marangoni,  $\mathbf{n} \sigma \nabla_S \cdot \mathbf{n}$  : surpression capillaire, loi de Laplace.

$$\mathbf{n} \sigma \nabla_S \cdot \mathbf{n} = 2H \mathbf{n}$$

- $H$  : courbure moyenne de la surface.

# CAS PARTICULIER 2D PLAN

- Bilan de quantité de mouvement l'interface

$$\dot{m}_1 \mathbf{v}_1 + \dot{m}_2 \mathbf{v}_2 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{T}_1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{T}_2 + \frac{d\sigma}{dl} \boldsymbol{\tau} - \frac{\sigma}{R} \mathbf{n} = 0$$

- Exemple fluide non visqueux

$$\mathbf{n}_1 (p_1 - p_2) + \frac{d\sigma}{dl} \boldsymbol{\tau} - \frac{\sigma}{R} \mathbf{n} = 0$$

- Loi de Laplace,  $\perp$  :  $(p_1 - p_2) = \frac{\sigma}{R} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1$

- Incohérence,  $//$  :  $\mu_k = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma}{dl} = 0$

- Effet Marangoni, fluides visqueux,

$$-(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{V}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{V}_2) \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{d\sigma}{dl} = 0$$

- $\sigma(T)$ ,  $\sigma(c)$ .

# BILANS AUX INTERFACES

- Bilan d'énergie totale :

$$\dot{m}_1 \left( u_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) + \dot{m}_2 \left( u_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{T}_1 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{T}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$$

- Bilan d'énergie totale (enthalpie),
  - Le changement de phase est l'effet dominant
  - La variation d'énergie cinétique peut être négligée
  - L'effet du saut de pression et des contraintes visqueuses peut être négligé,

$$\dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_2 h_2 + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

- Equations secondaires ([Delhaye, 1974](#)).
- Condition d'équilibre thermodynamique de l'interface :

$$\mathbf{v}_1^t = \mathbf{v}_2^t, \quad T_1 = T_2, \quad g_1 - g_2 = \frac{1}{2} \dot{m}_1^2 \left( \frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) - \left( \frac{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbb{V}_2 \cdot \mathbf{n}_2}{\rho_2} - \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbb{V}_1 \cdot \mathbf{n}_1}{\rho_1} \right)$$

# PROBLÈMES RÉSOLUS PAR LES ÉQUATIONS LOCALES

- Bilan globaux, principes fondamentaux
    - Equations locales phasiques
    - Relations de saut aux interfaces
  - Problèmes simple
    - Ecoulement d'un film liquide
    - Croissance d'une bulle (ébullition nucléée, cavitation etc.)
  - Problèmes diphasiques en général,
    - Interfaces multiples, déséquilibres
    - Fluctuations, intermittence, évolution des grandeurs moyennes.
- ⇒ Equations locales moyennées en espace (sur la section) thermohydraulique 1D
- ⇒ Equations locales moyennées en temps (codes 3D)
- ⇒ Equations locales moyennées en espace (sur la section) et en temps, codes système

# EQUATIONS MOYENNÉES SUR LA SECTION

- Rappel moyenne sur la section

$$\langle f_k \rangle_2 = \frac{1}{A_k} \int_{A_k} f_k dA$$

- Bilan pour les valeurs moyennes ? Bilan local intégré sur  $A_k$ . Exemple, bilan de masse,

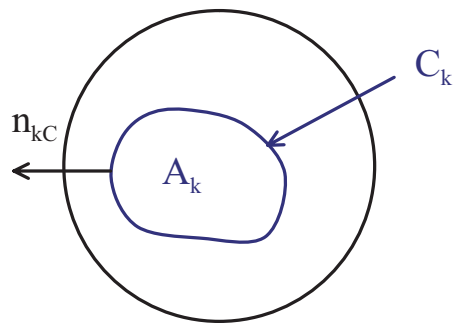
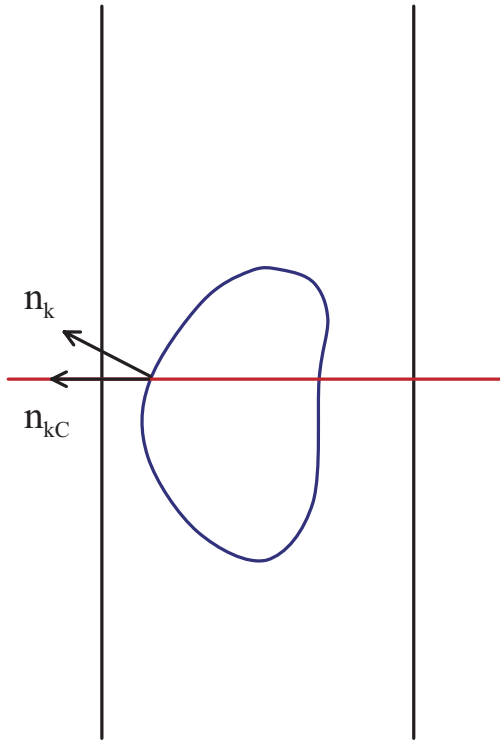
$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) = 0$$

- Intégration sur la section,

$$\int_{A_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} dA + \int_{A_k} \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) dA = 0$$

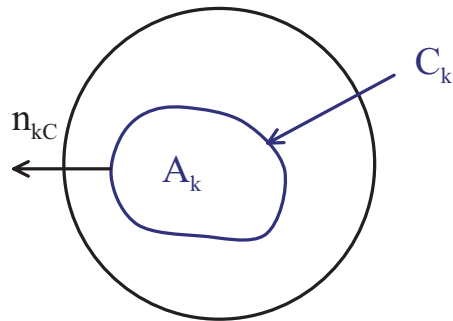
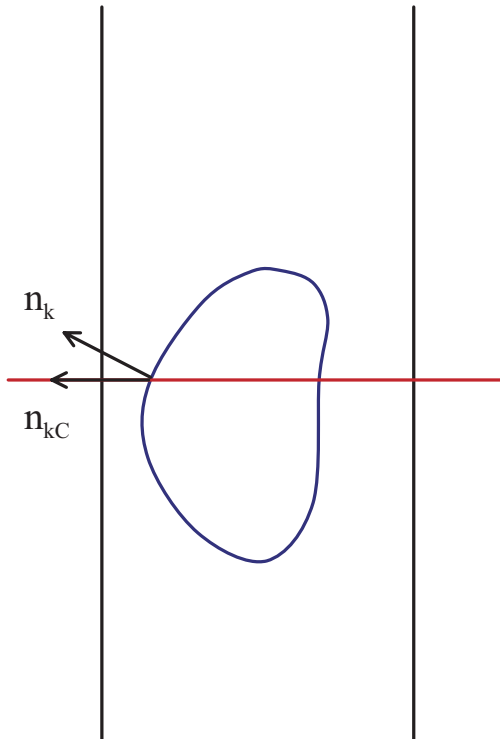
- Théorèmes de commutation, Leibniz et Gauss (formes limites)

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{A_k} \rho_k dA}_{A_k \langle \rho_k \rangle_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\int_{A_k} \rho_k w_k dA}_{A_k \langle \rho_k w_k \rangle_2} + \dots = 0$$





# OUTILS MATHÉMATIQUES



- Forme limite de la règle de Leibniz,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A_k} f_k dA = \int_{A_k} \frac{\partial f_k}{\partial t} dA + \int_{C_k} f_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

- Forme limite du théorème de Gauss,

$$\int_{A_k} \nabla \cdot \mathbf{B} dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_z + \int_{C_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{B} \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

- Identité utile (1),  $\mathbf{B} = \mathbf{n}_z$

$$\frac{\partial A_k}{\partial z} = - \int_{C_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

- Identité utile (2),  $\mathbb{B} = p\mathbb{I}$

$$\int_{A_k} \nabla p dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_{A_k} p \mathbf{n}_z dA + \int_{C_k} p \mathbf{n}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

# BILAN SUR LA SECTION

- Intégration sur la section,

$$\int_{A_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} dA + \int_{A_k} \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) dA = 0$$

- Théorème de Gauss et règle de Leibniz,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \rho_k w_k \rangle_2 = - \int_{C_k} \dot{m}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

- Production de la phase  $k$  par unité de longueur de conduite (homogénéisation)

$$\Gamma_k = - \int_{C_k} \dot{m}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

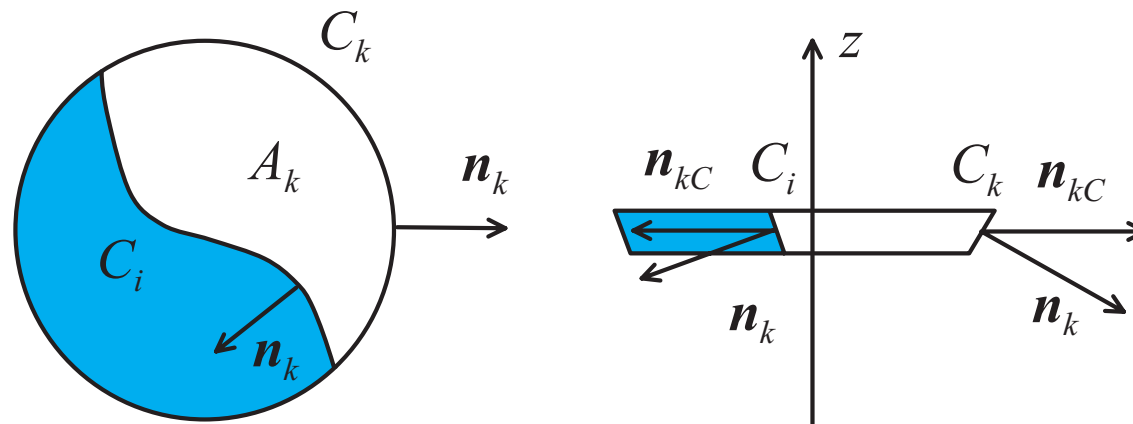
- Pas de changement de phase :  $\dot{m}_k = 0 \Rightarrow \Gamma_k = 0$
- De plus, bilan interface,  $\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0 \Rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv 0$
- le bilan de masse 1D n'est **pas fermé**

# FORME GÉNÉRALE

- Forme générale des bilans,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k \psi_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \mathbf{n}_z \cdot \rho_k \mathbf{v}_k \psi_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \mathbf{n}_z \cdot \mathbf{j}_{\psi k} \rangle_2 - A_k \langle \phi_k \rangle_2 \\ = - \int_{C_i} (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{j}_{\psi k}) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} - \int_{C_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{j}_{\psi k} \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned}$$

- Contour :  $C_i \cup C_k$ ,  $C_k$  périmètre de la paroi mouillée par la phase  $k$ ,  $C_i$  interface.



# BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

- Note sur le bilan de quantité de mouvement, équation vectorielle,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k \mathbf{v}_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \rho_k w_k \mathbf{v}_k \rangle_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \mathbf{n}_z \cdot \mathbb{T}_k \rangle_2 - A_k \langle \rho_k \mathbf{g}_k \rangle_2 \\ = - \int_{C_i} (\dot{m}_k \mathbf{v}_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned}$$

- Projection sur  $\mathbf{n}_z$ ,  $w_k = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_z$ , décomposition tenseur des contraintes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k w_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \rho_k w_k^2 \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle p_k \rangle_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \mathbf{n}_z \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z \rangle_2 \\ - A_k \langle \rho_k g_z \rangle_2 = - \int_{C_i} (\dot{m}_k w_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{n}_z) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned}$$

- Identité (1),  $\langle p_k \rangle_2 = p_C$

$$- \int_{C_k \cup C_i} p_k \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} = -p_C \int_{C_k \cup C_i} \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} = \langle p_k \rangle_2 \frac{\partial A_k}{\partial z}$$

- Autres choix possibles, excès de pression,  $p_i, p_C = \langle p_k \rangle_2 + p_i \dots$

# BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

- Bilan de quantité de mouvement, pressions égales,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k w_k \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \rho_k w_k^2 \rangle_2 + A_k \frac{\partial}{\partial z} \langle p_k \rangle_2 - \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \mathbf{n}_z \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z \rangle_2$$

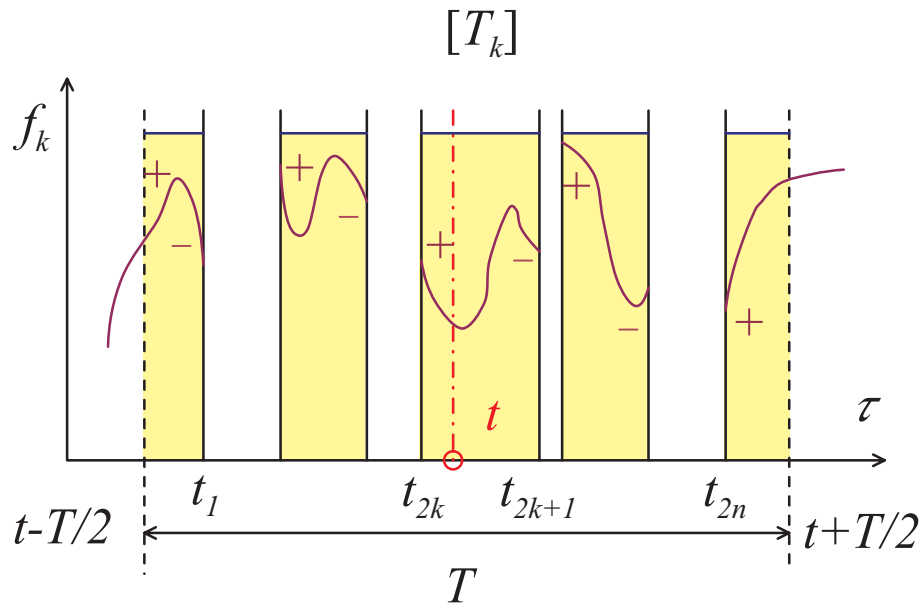
$$- A_k \langle \rho_k g_z \rangle_2 = - \int_{C_i} (\dot{m}_k w_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

- Transferts transverses dominants, écoulements quasi établis,

$$\frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \mathbf{n}_z \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z \rangle_2 \propto \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_t \frac{\partial w}{\partial z} \right) \rightarrow 0$$

- Donner un exemple où ce terme ne peut être négligé.
- **Fermetures nécessaires:** interactions à l'interface et à la paroi (frottement pariétal).

# EQUATIONS MOYENNÉES EN TEMPS



- Rappel moyenne temporelle conditionnée par  $X_k$ ,

$$\bar{f}^X = \frac{1}{T_k} \int_{[T_k]} f_k dt = \frac{\int_T X_k f_k dt}{\int_T X_k dt} = \frac{\overline{X_k f_k}}{\overline{X_k}}$$

- Moyenne temporelle,

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f dt$$

- Equation aux valeurs moyennes : ex. bilan de masse, intégré sur  $[T_k]$ ,

$$\int_{[T_k]} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} dt + \int_{[T_k]} \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) dt = 0$$

- Théorèmes de commutation, formes limites, Leibniz et Gauss

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{[T_k]} \rho_k dt}_{T_k \overline{\rho_k}^X} + \dots + \nabla \cdot \underbrace{\int_{[T_k]} \rho_k \mathbf{v}_k dt}_{T_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k}^X} + \dots = 0$$

# OUTILS MATHÉMATIQUES

- Forme limite de la règle de Leibniz (dérivation sous le signe somme),

$$\int_{[T_k]} \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = \frac{\partial}{\partial t} \int_{[T_k]} f_k dt - \sum_{\text{disc.} \in [T]} f_k \underbrace{\frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}}_{\pm 1}$$

- Forme limite du théorème de Gauss

$$\int_{[T_k]} \nabla \cdot \mathbf{B}_k dt = \nabla \cdot \int_{[T_k]} \mathbf{B}_k dt + \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{B}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}$$

- Bilan de masse moyenné, source interfaciale homogénéisée (source volumique),

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k}^X}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k}^X) = -\frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}$$

- Bilan généralisé moyenné, point de départ de la décomposition de Reynolds

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k \psi_k}^X}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k \psi_k}^X) + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\mathbf{j}_{\psi_k}}^X) - \alpha_k \overline{\phi_k}^X = -\frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{j}_{\psi_k}}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}$$

# MOYENNES COMPOSITES

- Exemple du bilan de masse, espace, puis temps

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{A_k \langle \rho_k \rangle_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k \langle \rho_k w_k \rangle_2} = - \overline{\int_{C_k} \dot{m}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}}$$

- Temps puis espace

$$\frac{\partial}{\partial t} A \langle \alpha_k \overline{\rho_k^X} \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A \langle \alpha_k \overline{\rho_k w_k^X} \rangle_2 = - A \langle \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} \rangle_2$$

- Membre de gauche identiques, commutation des opérateurs de moyenne
- Commutativité des termes d'interaction,
- Aire interfaciale volumique,

$$\gamma = \frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{1}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}$$

- Fermeture des termes d'interaction : flux moyen-aire interfaciale,

$$\frac{1}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} = \frac{\dot{m}_{ki}}{T} \sum_{\text{disc.} \in [T]} \frac{1}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|} = \gamma \dot{m}_{ki}$$



## POUR EN SAVOIR PLUS

- Les équations de bilan en écoulement monophasique ([Bird \*et al.\* , 2007](#)).  
Un livre de référence, pas un formulaire....
- Les équations de bilan des écoulements diphasiques ([Delhaye, 2008](#)).

# REFERENCES

- Aris, R. 1962. *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Prentice-Hall.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. 2007. *Transport phenomena*. Revised second edn. John Wiley & Sons.
- Delhaye, J. M. 1974. Jump conditions and entropy sources in two-phase systems, local instant formulation. *Int. J. Multiphase Flow*, **1**, 359–409.
- Delhaye, J.-M. 2008. *Thermohydraulique des réacteurs nucléaires*. Collection génie atomique. EDP Sciences.