UNE INTRODUCTION AUX ECOULEMENTS DIPHASIQUES
Les modèles 1D et les pertes de pression

HERVE LEMONNIER

DTN/SE2T, CEA/Grenoble, 38054 Grenoble Cedex 9
Tél. 04 38 78 45 40, *herve.lemonnier@cea.fr*

herve.lemonnier.sci.free.fr/TPF.htm

INSTN, décembre 2009

MODÈLES MOYENNÉS SUR LA SECTION

- Modèle homogène,
- Modèle à flux de dérive,
- Modèle à deux fluides,
  - Fermetures
  - Conséquences des choix de modélisation
    1. Cohérence physique du modèle,
    2. Nature mathématique du système d'EDP,
- Rappel des équations moyennées en espace et temps (simplifications courantes). Equations du mélange.

BILAN DE MASSE (MOYENNES COMPOSITES)

- Bilan de masse moyenné sur la section et en temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} A\overline{R_{k2} < \rho_k >_2} + \frac{\partial}{\partial z} A\overline{R_{k2} < \rho_k w_k >_2} = \Gamma_k, \quad \Gamma_k \triangleq -\overline{\int_{C_i} \dot{m}_k \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \centerdot \mathbf{n}_{kC}}}$$

- Définition des grandeurs moyennes :

$$\overline{R_{k2} < \rho_k >_2} \triangleq \overline{R_{k2}}\rho_k = \alpha_k \rho_k, \quad \overline{R_{k2} < \rho_k w_k >_2} \triangleq \alpha_k \rho_k v_k$$

- Avec ces notations,

$$\frac{\partial}{\partial t} A\alpha_k \rho_k + \frac{\partial}{\partial z} A\alpha_k \rho_k v_k = \Gamma_k$$

- NB. Hypothèse des profils plats : $\neq \alpha$ et w_k uniformes.

BILAN DE MASSE DU MÉLANGE

- Additionner les bilans de masse de chaque phase,

$$\frac{\partial}{\partial t}A(\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2) + \frac{\partial}{\partial z}A(\alpha_1\rho_1 v_1 + \alpha_2\rho_2 v_2) = 0$$

- Définition de la masse du mélange,

$$\rho \triangleq \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$$

- Définition de la vitesse du mélange, conserve le débit masse,

$$\rho v \triangleq \alpha_1\rho_1 v_1 + \alpha_2\rho_2 v_2$$

- Avec ces nouvelles notations, identique au principe !

$$\frac{\partial}{\partial t}A\rho + \frac{\partial}{\partial z}A\rho v = 0$$

BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

- Bilan de quantité de mouvement simplifié (1 pression au lieu de 3), contraintes visqueuses axiales négligées,

$$\frac{\partial}{\partial t} A\overline{< R_{k2}\rho_k w_k >_2} + \frac{\partial}{\partial z} A\overline{< R_{k2}\rho_k w_k^2 >_2} + A\overline{R_{k2}\frac{\partial}{\partial z} < p_k >_2} - A\overline{R_{k2} < \rho_k g_z >_2}$$

$$= -\overline{\int_{C_i} (\dot{m}_k w_k - \mathbf{n}_k \,.\, \mathbb{V}_k \,.\, \mathbf{n}_z) \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}}} + \overline{\int_{C_k} \mathbf{n}_k \,.\, \mathbb{V}_k \,.\, \mathbf{n}_z \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}}}$$

- Profils plats : correlation spatiale des vitesses C, pression p_k,

$$C \triangleq \frac{\overline{< R_{k2}\rho_k w_k^2 >_2}}{\alpha_k \rho_k v_k^2} = 1, \qquad \overline{R_{k2}\frac{\partial}{\partial z} < p_k >_2} \triangleq \alpha_k \frac{\partial p_k}{\partial z}$$

- Termes d'interaction :

$$-\overline{\int_{C_i} (\dot{m}_k w_k) \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}}} = \Gamma_k v_{ki}, \qquad \overline{\int_{C_k} \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}}} = A \nless \gamma \ngtr_2 = A\gamma$$

$$\overline{\int_{C_i} \mathbf{n}_k \,.\, \mathbb{V}_k \,.\, \mathbf{n}_z \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}}} = -A\gamma\tau_{ki}, \qquad \overline{\int_{C_k} \mathbf{n}_k \,.\, \mathbb{V}_k \,.\, \mathbf{n}_z \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}}} = -P_k \tau_{wk}$$

QUANTITÉ DE MOUVEMENT DU MÉLANGE

- Forme simplifiée, phase k,

$$\frac{\partial}{\partial t}A\alpha_k\rho_k v_k + \frac{\partial}{\partial z}A\alpha_k\rho_k v_k^2 - A\alpha_k\frac{\partial p_k}{\partial z} = \Gamma_k v_{ki} - A\gamma\tau_{ki} - P_k\tau_{wk} + A\alpha_k\rho_k g_{kz}$$

- Bilan de quantité de mouvement du mélange, une pression,

$$\frac{\partial}{\partial t}A(\alpha_1\rho_1 v_1 + \alpha_2\rho_2 v_2) + \frac{\partial}{\partial z}A(\alpha_1\rho_1 v_1^2 + \alpha_2\rho_2 v_2^2) - A\frac{\partial p}{\partial z} = -P\tau_w + A\rho g_z$$

- Autre forme du terme d'inertie, $x \triangleq \frac{M_G}{M} = \dfrac{\alpha_G\rho_G v_G}{\alpha_L\rho_L v_L + \alpha_G\rho_G v_G}$

$$\alpha_G\rho_G v_G^2 + \alpha_L\rho_L v_L^2 = \frac{G^2}{\rho'}, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{x^2}{\alpha\rho_G} + \frac{(1-x)^2}{(1-\alpha)\rho_L}, \quad G = \frac{M}{A}$$

- Donner deux exemples d'incohérence de l'hypothèse des profils plats.

BILAN D'ÉNERGIE TOTALE

- Bilan d'énergie totale $\rightarrow$ en enthalpie,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k \left(u_k + \frac{1}{2} \mathrm{v}_k^2 \right) >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k w_k \left(u_k + \frac{1}{2} \mathrm{v}_k^2 \right) >_2$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{n}_z \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) >_2 - A_k < \rho_k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{v}_k >_2$$

$$= - \int_{C_i \cup C_k} \left(\dot{m}_k \left(u_k + \frac{1}{2} \mathrm{v}_k^2 \right) + \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) \right) \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

- Termes en $\frac{\partial}{\partial z}$, $u_k \rightarrow h_k - p_k/\rho_k$, $\mathbb{T}_k \rightarrow \mathbb{V}_k$,
- Termes $\frac{\partial}{\partial t}$ term $u_k \rightarrow h_k - p_k/\rho_k$, ajoute $-\frac{\partial}{\partial t} A_k < p_k >_2$, utiliser l'identité utile (2),

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k < p_k >_2 = A_k < \frac{\partial p_k}{\partial t} >_2 + \int_{C_i \cup C_k} p_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

- Regrouper les termes de pression à droite,

BILAN D'ÉNERGIE TOTALE

- Bilan d'énergie totale moyenné sur la section (enthalpie):

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k \left(h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2 - A_k < \frac{\partial p_k}{\partial t} >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k w_k \left(h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{n}_z \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{v}_k) >_2 - A_k < \rho_k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{v}_k >_2$$

$$= - \int_{C_i \cup C_k} \left(\dot{m}_k \left(h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) + \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{v}_k) \right) \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

- Moyenne en temps, négliger les effets diffusifs longitudinaux et visqueux à l'interface,

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{A_k < \rho_k \left(h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2} - \overline{A_k < \frac{\partial p_k}{\partial t} >_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k < \rho_k w_k \left(h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2}$$

$$- \overline{A_k < \rho_k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{v}_k >_2} = - \overline{\int_{C_i \cup C_k} \left(\dot{m}_k \left[h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right] + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{q}_k \right) \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}}$$

- Pour définir l'enthalpie moyenne, on ne peut conserver qu'un seul terme (flux, permanent).

BILAN D'ÉNERGIE TOTALE MOYEN

- On choisit de conserver le flux,

$$\overline{A_k < \rho_k w_k \left(h_k + \frac{1}{2}v_k^2\right) >_2} \triangleq A\alpha_k\rho_k v_k \left(h_k + \frac{1}{2}w_k^2\right)$$

- Bilan d'énergie totale simplifié,

$$\frac{\partial}{\partial t}A\alpha_k\rho_k\left(h_k + \frac{1}{2}v_k^2\right) - A\alpha_k\frac{\partial p_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}A\alpha_k\rho_k v_k\left(h_k + \frac{1}{2}v_k^2\right)$$

$$-A\alpha_k\rho_k g_k v_k = \Gamma_k h_{ki}^t + A\gamma q_{ki} + P_k q_{wk}$$

BILAN D'ÉNERGIE DU MÉLANGE

- Somme des deux bilans phasiques, une seule pression

$$\frac{\partial}{\partial t}A(\alpha_1\rho_1 h_1^t + \alpha_2\rho_2 h_2^t) + \frac{\partial}{\partial z}A(\alpha_1\rho_1 v_1 h_1^t + \alpha_2\rho_2 v_2 h_2^t)$$

$$-A\frac{\partial p}{\partial t} - A(\alpha_1\rho_1 g_1 v_1 + \alpha_2\rho_2 g_2 v_2) = Pq_w$$

- $k_k^t = h_k + \frac{1}{2}w_k^2$: enthalpie totale.
- Autre forme du terme convectif, enthalpie du (de) mélange, h^t,

$$\underbrace{A\alpha_V\rho_V v_V}_{M_V} h_V^t + \underbrace{A\alpha_L\rho_L v_L}_{M_L} h_L^t \triangleq Mh^t = M(xh_V^t + (1-x)h_L^t)$$

- NB, l'enthalpie moyenne dans la section n'est pas égale à l'enthalpie de mélange.
- L'équation du mélange reste exacte permanent seulement.

$$\frac{\partial}{\partial t}A\rho h^t - A\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}A\rho w h^t = Pq_w + Mg_z$$

MODÈLE HOMOGÈNE À L'ÉQUILIBRE (HEM)

- Evolution imposée, 3 bilans pour le mélange + 3 hypothèses
  - Egalité des vitesses moyennes : $w_V = w_L \equiv \alpha = \beta$
  - Phase liquide et vapeur en moyenne à l'équilibre : $T_L = T_V = T_{\text{sat}}(p)$
- Fermeture thermodynamique, EOS,

$$\rho_L = \rho_{L\text{sat}}(p), \quad \rho_V = \rho_{V\text{sat}}(p), \qquad h_L = h_{L\text{sat}}(p), \quad h_V = h_{V\text{sat}}(p)$$

- Taux de vide du modèle homogène,

$$\alpha = \beta = \frac{Q_G}{Q_G + Q_L} = \frac{x\rho_L}{x\rho_L + (1-x)\rho_V} = \alpha(x,p)$$

- Bilans,

$$\frac{\partial}{\partial t}A\rho + \frac{\partial}{\partial z}A\rho w = 0, \quad \rho = \alpha\rho_V + (1-\alpha)\rho_L$$

$$\frac{\partial}{\partial t}A\rho w + \frac{\partial}{\partial z}A\rho w^2 + A\frac{\partial p}{\partial z} = -P\tau_W + A\rho g_z$$

$$\frac{\partial}{\partial t}A\rho(h + \frac{1}{2}w^2) - A\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}A\rho w(h + \frac{1}{2}w^2) = Pq_W + A\rho g_z w$$

MODÈLE HOMOGÈNE À L'ÉQUILIBRE

- Autre forme des bilans, combinaison avec le bilan de masse

$$\frac{\partial}{\partial t}A\rho + \frac{\partial}{\partial z}A\rho w = 0$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} + \rho w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{P}{A}\tau_W + \rho g_z$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}(h + \frac{1}{2}w^2) - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho w\frac{\partial}{\partial z}(h + \frac{1}{2}w^2) = \frac{P}{A}q_W + \rho g_z w$$

- Bilan d'énergie mécanique du mélange,

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}w^2 + \rho w\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}w^2 + w\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{P}{A}w\tau_W + \rho g_z w$$

- Bilan d'entropie du mélange, $T\mathrm{d}s = \mathrm{d}h - \dfrac{\mathrm{d}p}{\rho}$

$$\rho T\frac{\partial s}{\partial t} + \rho w T\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{P}{A}(q_W + w\tau_W)$$

MODÈLE HOMOGÈNE À L'ÉQUILIBRE

- Bilans de masse, d'énergie et d'entropie,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\rho w}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z}$$
$$\rho\frac{\partial}{\partial t}(h + \frac{1}{2}w^2) - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho w\frac{\partial}{\partial z}(h + \frac{1}{2}w^2) = \frac{P}{A}q_W + \rho g_z w$$
$$\rho T\frac{\partial s}{\partial t} + \rho w T\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{P}{A}(q_W + w\tau_W)$$

- Cas particulier important : écoulement stationnaire, forces de volume négligeables, adiabatique et sans frottement,

$$M = A\rho w = \mathrm{cste}$$
$$h + \frac{1}{2}w^2 = \mathrm{cste}$$
$$s = x s_V + (1 - x)s_L = \mathrm{cste}$$

- Applications : flashing, tube long, chauffage en paroi, débit critique.

FERMETURES DU MODÈLE HOMOGÈNE

- Frottement pariétal et flux de chaleur, q_W, τ_W
- Variables indépendantes : x, w, et p
- Thermodynamique, $v = \dfrac{1}{\rho} = x v_V + (1-x) v_L$

$$v_L = v_{L\mathrm{sat}}(p), \quad v_V = v_{V\mathrm{sat}}(p), \qquad h_L = h_{L\mathrm{sat}}(p), \quad h_V = h_{V\mathrm{sat}}(p)$$

$$v_{V,p}, \quad v_{L,p}, \quad h_{V,p}, \quad h_{L,p}$$

- Cohérence thermodynamique.

MODÈLE À FLUX DE DÉRIVE

- Modèle à flux de dérive (*drift-flux*), déséquilibre mécanique.
- Bilans de masse, bilan de quantité de mouvement du mélange, et d'énergie totale, $w_V \neq w_L$, w vitesse du mélange.
- Fermeture, équation d'évolution (FLICA)

$$w_V - w_L = f(x, p, \alpha, \text{régime d'écoulement}, \cdots)$$

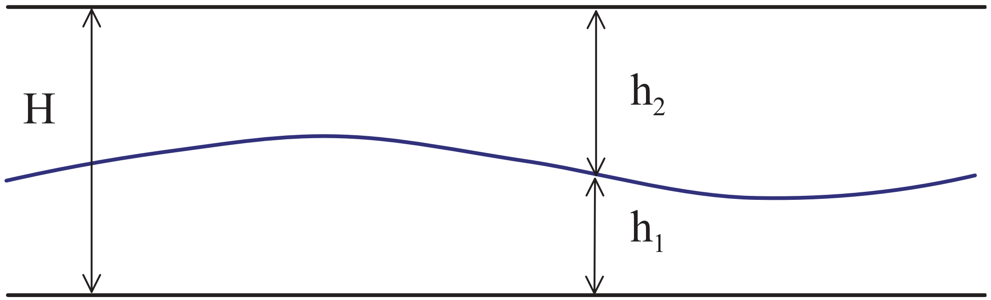
$$J_{GL} = f(\alpha, \text{régime d'écoulement}, \cdots)$$

- Transitoires lents : non contrôlées par l'inertie.
- Ce modèle est aussi utilisé en 3D, voir par exemple Delhaye (2008a), Ishii & Hibiki (2006). Une seule équation d'impulsion.

MODÈLE À DEUX FLUIDES

- Déséquilibre mécaniques et thermiques,
  - 3 équations de bilan par phase (6).
  - 3 équations de bilan pour le mélange et 3 équations pour la phase dispersée.
- Fermetures.
  - Loi topologique, $< pq >$, $< p >< q >$, pressions
  - Termes d'interaction aux interfaces
  - Termes d'interaction de chaque phase avec la paroi.
- Conséquences des fermetures,
  - Propagation,
  - Ecoulement critique,
  - Nature du système (hyperbolicité).

EXEMPLE DE L'ÉCOULEMENT STRATIFIÉ



- Hypothèses : isotherme, incompressible, horizontal, $\mu = 0$, $\sigma = 0$, $\dot{m} = 0$, 2D.
- Bilans de masse,

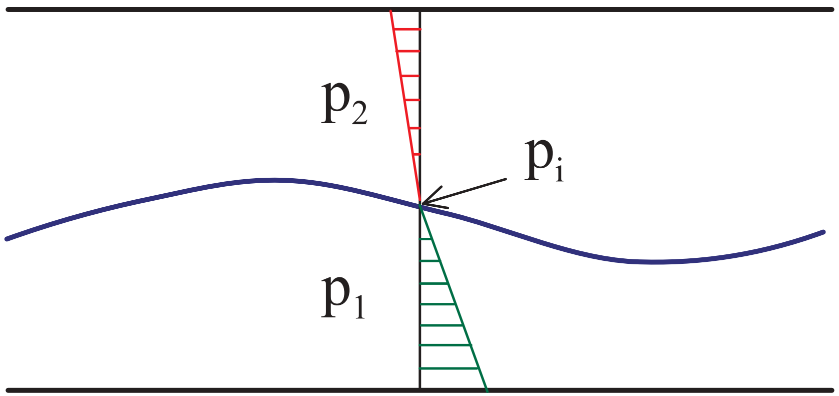
$$\frac{\partial}{\partial t} h_1 \rho_1 + \frac{\partial}{\partial z} h_1 \rho_1 < u_1 >= 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t} h_2 \rho_2 + \frac{\partial}{\partial z} h_2 \rho_2 < u_2 >= 0$$

- Bilan de quantité de mouvement, à l'interface,

$$\frac{\partial}{\partial t} h_1 \rho_1 < u_1 > + \frac{\partial}{\partial z} h_1 \rho_1 < u_1^2 > + \frac{\partial}{\partial z} h_1 < p_1 >= p_{i1} \frac{\partial h_1}{\partial z}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} h_2 \rho_2 < u_2 > + \frac{\partial}{\partial z} h_2 \rho_2 < u_2^2 > + \frac{\partial}{\partial z} h_2 < p_2 >= p_{i2} \frac{\partial h_2}{\partial z}$$
$$p_{i1} = p_{i2} \triangleq p_i$$

FERMETURES

- 4 équations, 5 inconnues $h, < u_1 >, < u_2 >, < p_1 >, < p_2 >,$
- 3 inconnues supplémentaires : $< u_1^2 >, < u_2^2 >, p_i.$



- Loi topologique

$$< p_1 >= p_i + \frac{1}{2}\rho_1 g h_1$$
$$< p_2 >= p_i - \frac{1}{2}\rho_2 g h_2$$

- Ne se déduit pas du bilan qdm $\perp$.

- Corrélations spatiales, $C = 1$, autres choix

$$\frac{< u_k^2 >}{< u_k >^2} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} < u_k^2 >= \frac{1}{T}\left[< u_k^2 > - < u_k^2 >_0\right]$$

- Système fermé.

STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT STRATIFIÉ

- Système à résoudre : $\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} = 0$, $\mathbf{X} = (h, u_1, u_2, p_1)$:

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 h_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} \rho_1 u_1 & \rho_1 h_1 & 0 & 0 \\ -\rho_2 u_2 & 0 & \rho_2 h_2 & 0 \\ \frac{1}{2}\rho_1 g h_1 & \rho_1 u_1 h_1 & h_1 & \\ (\rho_1 - \frac{1}{2}\rho_2) g h_2 & 0 & \rho_2 u_2 h_2 & h_2 \end{bmatrix}$$

- Méthode de perturbation, Van Dyke (1975) : $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$
- Linéarisation,

$$\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial t} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial z} = 0, \qquad \mathbf{X}_0 = \text{cste}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_0)\frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial t} + \mathbf{B}(\mathbf{X}_0)\frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial z} = 0$$

- $\mathbf{X}_0$: solution de base, $\mathbf{X}_1$: perturbation (ordre 1)

STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT STRATIFIÉ

- Ondes progressives : $\mathbf{X}_1 = \widetilde{\mathbf{X}}_1 \exp i(\omega t - kz)$, $c = \omega/k$,
- Stabilité temporelle : $X_1(a,t) = f(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$, évolution dans le domaine ?
- Stabilité spatiale : $X_1(z,0) = g(z)$, $k \in \mathbb{R}$, amplification ?
- Second membre non nul, hypothèse des grandes longueurs d'onde.

$$(c\mathbf{A}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{B}(\mathbf{X}_0))\widetilde{\mathbf{X}}_1 = 0$$

- Solution à une constante près : $\widetilde{\mathbf{X}}_1 \in \ker(c\mathbf{A}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{B}(\mathbf{X}_0))$
- Relation de dispersion :

$$-\rho_1\rho_2 h_1 h_2 \left(\rho_1 h_2 (u_1 - c)^2 + \rho_2 h_1 (u_2 - c)^2 - (\rho_1 - \rho_2) g h_1 h_2\right) = 0$$

- Stabilité : 2 racines réelles ssi,

$$(u_1 - u_2)^2 \leqslant g(\rho_1 - \rho_2)\frac{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}{\rho_1 \rho_2}$$

STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT STRATIFIÉ

- Stabilité conditionnelle : $\Delta u \leqslant \Delta u_C$

$$(u_1 - u_2)^2 \leqslant g(\rho_1 - \rho_2)\frac{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}{\rho_1 \rho_2}$$

  - Lourd dessus, léger dessous, $\rho_2 > \rho_1$, toujours instable (c'est heureux)
  - Profils de pression plats : toujours instable, $(g = 0)$
- Nature mathématique du système : conditionnellement hyperbolique.
- $g = 0$: problème à conditions initiales mal posé au sens d'Hadamard. Impossibilité d'établissement à partir d'un transitoire.
- Pourquoi obtient-on une solution numérique pour l'écoulement établi ?
- Sans fermetures différentielles, le modèle à deux fluides et à une pression est mal posé.

MODÉLISATION DES PERTES DE PRESSION

- Modélisation simplifiée
  - Bilan de masse du mélange
  - Bilan de quantité de mouvement du mélange
  - Ec. adiabatique : $x = x_0$, bilan d'énergie du mélange, eq. thermo.
  - Equation d'évolution ($w_V \neq w_L$)
- Fermetures :

$$\sum_{L,G} \overline{\int_{C_k} \mathbf{n}_k \,.\, \mathbb{V}_k \,.\, \mathbf{n}_z \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}}} = -P\tau_W$$

$$= -\sum_{L,G} \overline{\int_{C_k} \mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{q}_k \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}}} = Pq_W$$

- $A = \text{cste}$, $\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC} = 1$

MODÉLISATION DES PERTES DE PRESSION

- Ecoulement permanent, section constante

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\rho w = 0, \quad G = \mathrm{cste}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\rho w^2 + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{P}{A}\tau_W + \rho g_z, \quad \frac{P}{A} \triangleq \frac{4}{D_h}$$

- Le frottement pariétal n'apparaît que dans le bilan de qdm.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\rho w^2 - \frac{P}{A}\tau_W + \rho g_z \triangleq \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_A + \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_F + \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_G$$

- Détermination expérimentale de $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$ et éventuellement $\alpha = \overline{R_{G2}}$
- Modéle d'évolution utilisé pour obtenir $\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_F$:

Utilisation dans des conditions identiques.

FROTTEMENT PARIÉTAL : MODÈLE HOMOGÈNE

- Le frottement n'est pas le terme dominant,

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_F = -\frac{P}{A}\tau_W = -\frac{4}{D_h}\tau_W$$

- Coefficient de frottement : $f = 4C_f$ (attention...)

$$C_F = \frac{\tau_W}{\frac{1}{2}\rho w^2}, \quad f = \frac{D\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_F}{\frac{1}{2}\rho w^2}$$

1. Ecoulement annulaire dispersé $x \approx 1$, $C_F = 0,005$, auto-vaporisation (*flashing*) $x \approx 0$, $C_F = 0,003$.
2. $x \ll 1$, $C_F = C_{FL}$, $M = M_L + M_V$, $x \approx 1$, $C_F = C_{FG}$, $M = M_L + M_V$
3. Ecoulement monophasique :

$$\text{Poiseuille : } \frac{16}{\mathrm{Re}}, \quad \text{Blasius : } \begin{cases} 0,079\ \mathrm{Re}^{-0,25}, & \mathrm{Re} < 20\ 000 \\ 0,046\ \mathrm{Re}^{-0,20}, & \mathrm{Re} > 20\ 000 \end{cases} \qquad \mathrm{Re} \triangleq \frac{GD}{\mu}$$

FROTTEMENT PARIÉTAL

- Perspective historique : viscosité équivalente,
  - Dukler (1964) : $\mu = \beta\mu_g + (1-\beta)\mu_L$, $C_F = 0,0014 + 0,125\mathrm{Re}^{-0,32}$
  - Ishii-Zuber (1978), suspensions (liquide-gaz/liquide, $\alpha_{DM} = 0,62$)

$$\frac{\mu}{\mu_C} = \left(1 - \frac{\alpha_D}{\alpha_{DM}}\right)^{-2,5\alpha_{DM}\frac{\mu_D+0,4\mu_C}{\mu_D+\mu_C}}$$

- Variation de pression par accélération, modèle d'évolution ($\alpha \neq \beta$),

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_A = -G^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{x^2}{\alpha\rho_V} + \frac{(1-x)^2}{(1-\alpha)\rho_L}\right]$$

- Evolution du titre, bilan d'énergie (basse vitesse), équilibre thermodynamique,

$$G\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(xh_V + (1-x)h_L) = \frac{4}{D_c}q_W$$

2 CONSTITUANTS : LOCKHART & MARTINELLI

- Expérience : eau-air, basse pression, Δp_F et R_{G3} mesurés (QCV). 3 expériences, même dispositif (tube horizontal).

Situation	diphasique	gaz seul	liq. seul
Débit	$M = M_G + M_L$	M_G	M_L
$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_F$	$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)$	$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_G$	$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_L$

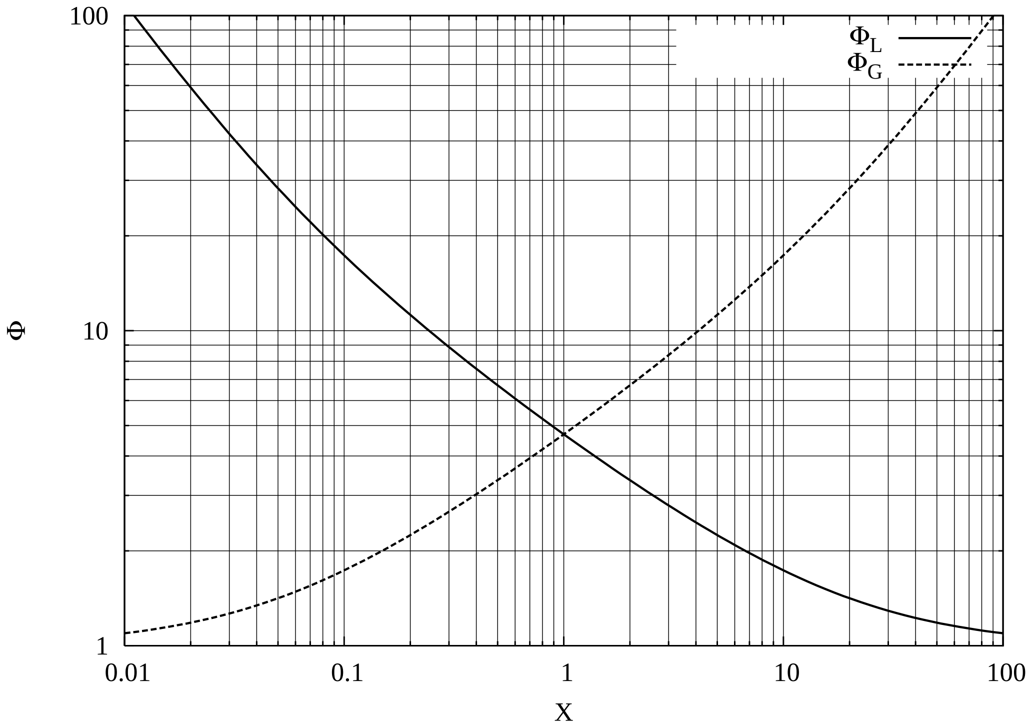
- Définitions de la perte de pression par frottement sans dimension (*two-phase pressure drop multiplier*)

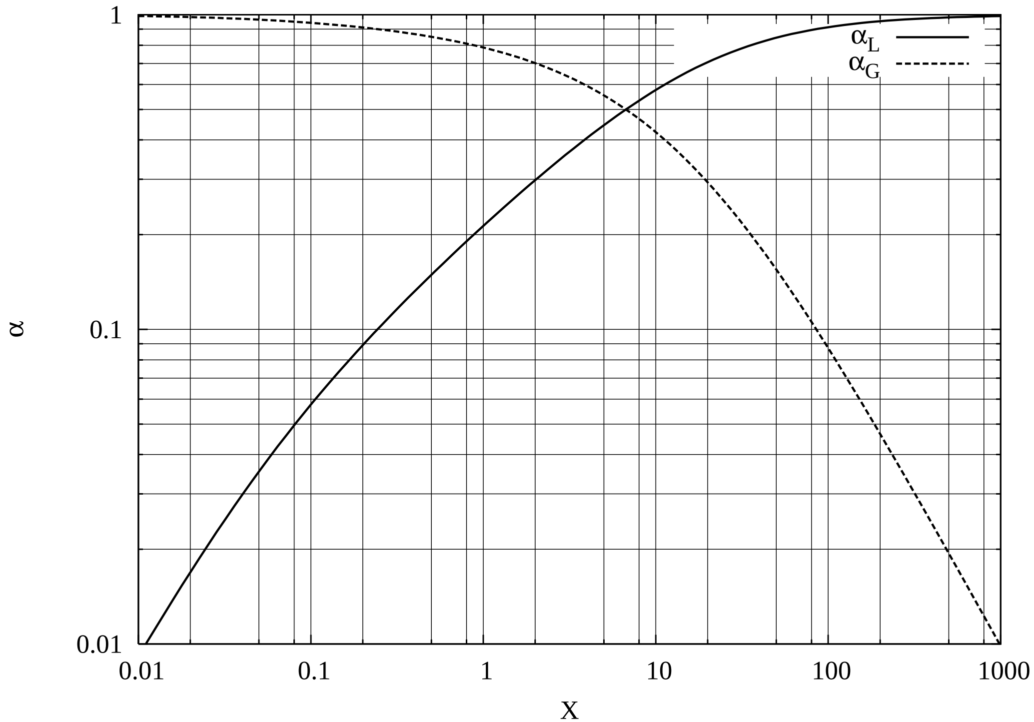
$$\Phi_L^2 = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_L}, \quad \Phi_G^2 = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_G}, \quad X^2 = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_L}{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_G}$$

- Correlation de Blasius ($C_f = 0,046\ \mathrm{Re}^{-0,2}$), X, paramètre de L. & M.

$$X_{tt} = \left(\frac{\mu_L}{\mu_G}\right)^{0,1} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{0,9} \left(\frac{\rho_G}{\rho_L}\right)^{0,5}$$

CORRÉLATION DE LOCKHART & MARTINELLI





$$\Phi_L = \sqrt{1 + \frac{20}{X} + \frac{1}{X^2}}$$

$$\alpha_L = \frac{X}{\sqrt{1 + 20X + X^2}}$$

EAU-VAPEUR : MARTINELLI & NELSON

- Expérience : eau-vapeur, $34.5 \div 207$ bar, $\Delta p_G \approx 0$.
  2 expériences, même dispositif (hélice GV). $\Delta p = \Delta p_F + \Delta p_A$.

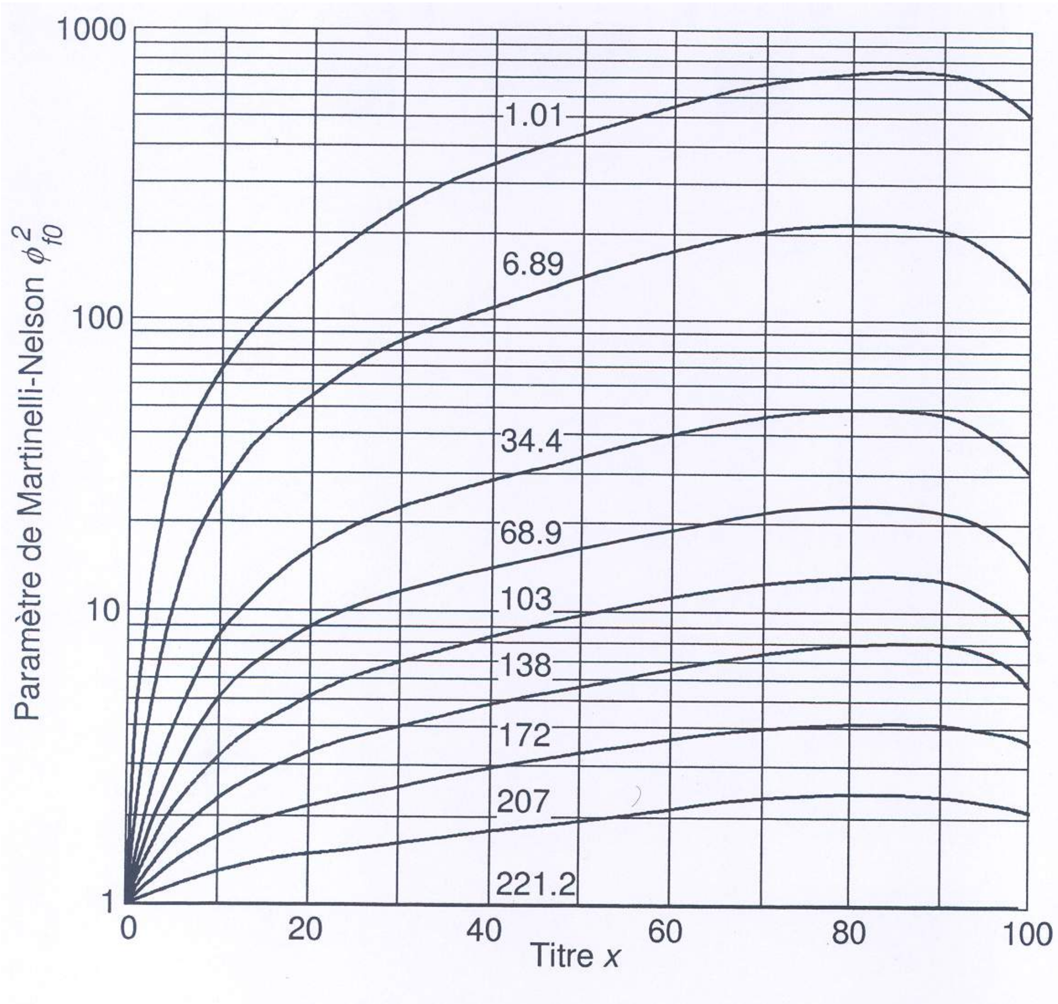
Situation	diphasique	liquide seul
Débit	M	$M_L = M$
$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_F$	$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)$	$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{fo}$

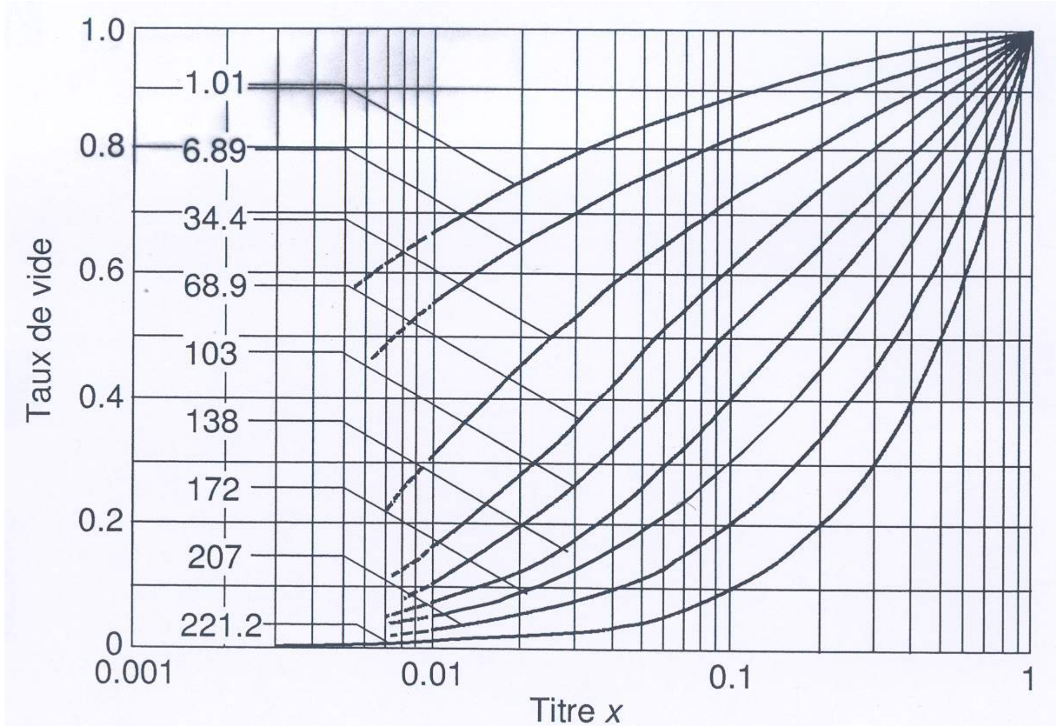
- Définitions de la perte de pression par frottement sans dimension,

$$\Phi_{f0}^2 = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{fo}}$$

- Evolution (taux de vide), données et modèles

CORRÉLATION DE MARTINELLI & NELSON

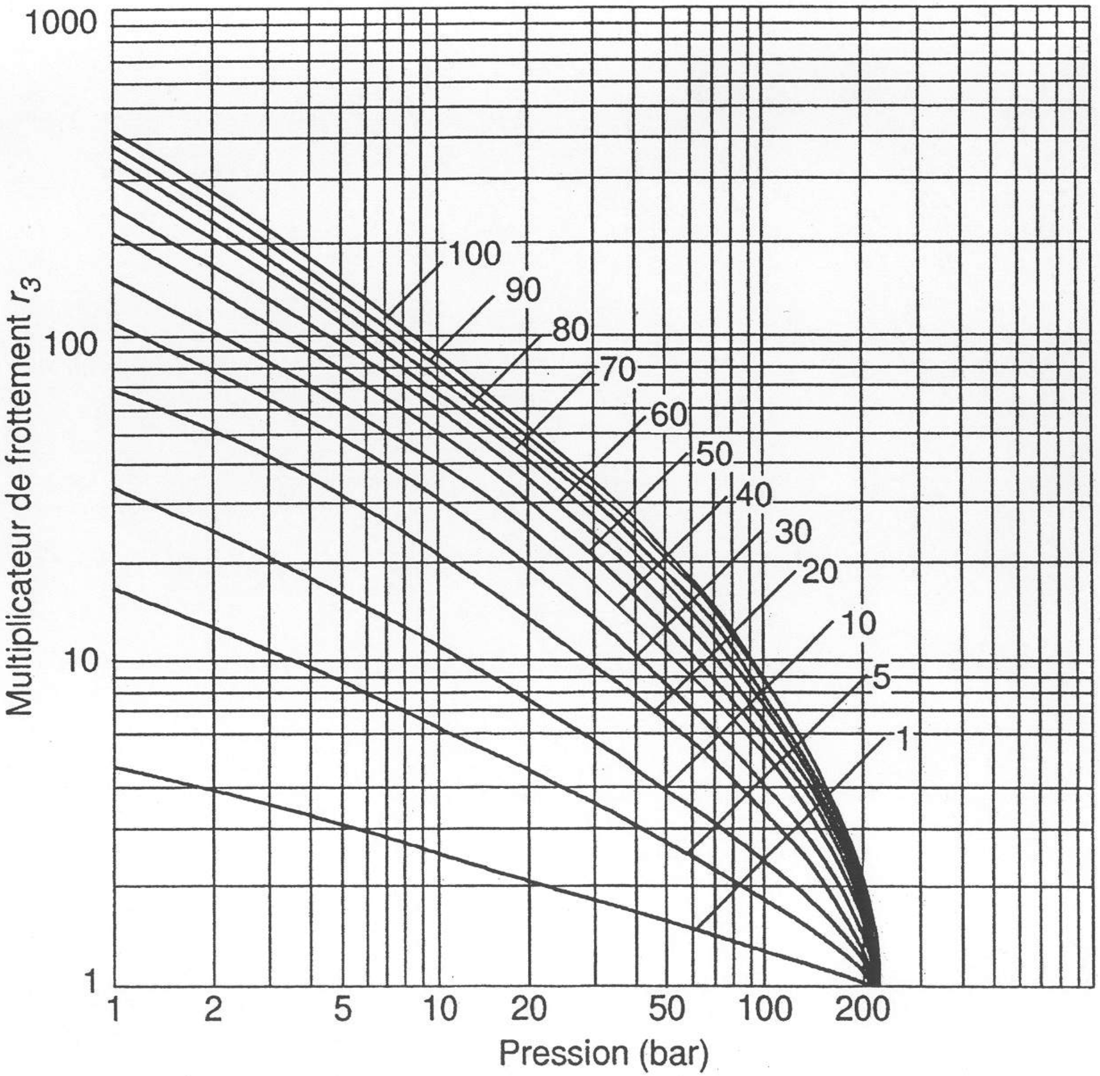




Taux de vide (accélération), paramétré en pression (bar).

$$\Phi^2_{f0} = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{fo}}$$

ECOULEMENTS BOUILLANTS



Paramétré en titre de sortie.

- Ecoulements évolutifs (chauffage), Thom.

$$r_3 = \frac{\Delta p_F}{\Delta p_{Fo}} = \frac{1}{x_S} \int_0^{x_S} \Phi^2_{Lo} \mathrm{d}x$$

- Autres méthodes et pour en savoir plus Delhaye (2008b).

CORRELATION DE FRIEDEL

- Réduction de qqs milliers de données, fluides variés, sans dimension. Conduite horizontale ou verticale. Même formulation que le modèle de Martinelli & Nelson. On se donne M et x :

$$\Phi_{Lo}^2 = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_F}{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{Lo}} = E + \frac{3,24FH}{\mathrm{Fr}^{0,045}\mathrm{We}^{0,035}}$$

$$\rho_h = \left(\frac{x}{\rho_G} + \frac{1-x}{\rho_L}\right)^{-1}, \quad \mathrm{We} = \frac{G^2 D}{\sigma \rho_h}, \quad \mathrm{Fr} = \frac{G^2}{g D \rho_h^2}$$

$$H = \left(\frac{\rho_L}{\rho_G}\right)^{0,91}\left(\frac{\mu_G}{\mu_L}\right)^{0,19}\left(1 - \frac{\mu_G}{\mu_L}\right)^{0,7}, \quad F = x^{0,78}(1-x)^{0,224}$$

$$C_{FGo} = C_{FG}(M), \quad C_{FLo} = C_{FL}(M), \quad E = (1-x)^2 + x^2 \frac{\rho_L C_{FGo}}{\rho_G C_{FLo}}$$

REFERENCES

Delhaye, J.-M. 2008a. *Thermohydraulique des réacteurs nucléaires.* Collection génie atomique. EDP Sciences. Chap. 7-Modélisation des écoulements diphasiques en conduite, pages 231–274.

Delhaye, J.-M. 2008b. *Thermohydraulique des réacteurs nucléaires.* Collection génie atomique. EDP Sciences. Chap. 8-Pertes de pression dans les conduites, pages 275–317.

Ishii, M., & Hibiki, T. 2006. *Thermo-fluid dynamics of two-phase flows.* Springer.

Van Dyke, M. 1975. *Perturbation methods in fluid mechanics.* Parabolic Press.