

Corrigé du devoir surveillé de transferts couplés de décembre 2008

Hervé Lemonnier, DTN/SE2T/LIEX, CEA/Grenoble, 38054 Grenoble cedex 9
Tél. : 04 38 78 45 40, Fax : 04 38 78 50 45, Mél. : *herve.lemonnier@cea.fr*

1 Convection naturelle massique

1.1 Masse molaire du mélange

En cours, on a montré que pour un mélange de deux constituants, la masse molaire du mélange est donnée en fonction des fractions massiques par,

$$\frac{1}{M} = \frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B} \quad (1)$$

En appliquant à l'air (A) et la vapeur d'eau (V) et en considérant $\omega_A = \omega$, on obtient,

$$\frac{1}{M} = \frac{\omega}{M_A} + \frac{1-\omega}{M_V} \quad (2)$$

1.2 Approximation de Boussinesq

Dans l'approximation de Boussinesq, on linéarise les variations de composition et de température autour des conditions au loins de la plaque. En effectuant un développement limité au premier ordre, autour de ces conditions, on a

$$\rho(\omega, T) \approx \rho(\omega_\infty, T_\infty) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, \omega_\infty} (T - T_\infty) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega} \right)_{p, T_\infty} (\omega - \omega_\infty) \quad (3)$$

La différence de masse volumique intervenant dans le terme de flottabilité dans l'approximation de Boussinesq s'écrit dont,

$$\rho_\infty - \rho = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, \omega_\infty} (T - T_\infty) - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega} \right)_{p, T_\infty} (\omega - \omega_\infty) \quad (4)$$

En mettant ρ_∞ en facteur dans le second membre, on a,

$$\rho_\infty - \rho = \rho_\infty \left(-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, \omega_\infty} (T - T_\infty) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega} \right)_{p, T_\infty} (\omega - \omega_\infty) \right) \quad (5)$$

En prenant en compte les définitions du coefficient de dilatabilité à pression constante, $\beta > 0$ et γ pour l'effet de la composition,

$$\beta \triangleq -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, \omega}, \quad \gamma \triangleq \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega} \right)_{p, T} \quad (6)$$

il vient,

$$B = \rho_\infty g [\beta(T - T_\infty) - \gamma(\omega - \omega_\infty)] \quad (7)$$

où on rappelle que β et γ doivent être évalués aux conditions loins de la plaque.

1.3 Application aux gaz parfaits

Pour un gaz parfait, on a,

$$\rho(T, \omega) = \frac{pM(\omega)}{\tilde{R}T} \quad (8)$$

où la masse molaire du mélange est donnée par (2). En dérivant par rapport à T à p et ω constants et en évaluant le résultat à l'infini, il vient,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p, \omega} = -\frac{pM}{\tilde{R}T^2} = -\frac{\rho}{T}, \quad -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p, \omega} = \frac{1}{T}. \quad (9)$$

On en déduit,

$$\beta = \frac{1}{T_\infty}. \quad (10)$$

En dérivant (8) par rapport à ω , on a

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega}\right)_{p, T} = \frac{p}{\tilde{R}T} \frac{dM}{d\omega} = \frac{\rho}{M} \frac{dM}{d\omega}, \quad \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega}\right)_{p, T} = \frac{1}{M} \frac{dM}{d\omega} = -M \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{M}\right) \quad (11)$$

En considérant (2) s'écrit aussi,

$$\frac{1}{M} = \frac{\omega M_V + (1 - \omega)M_A}{M_A M_V}, \quad \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{M}\right) = \frac{M_V - M_A}{M_A M_V} \quad (12)$$

On obtient,

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega}\right)_{p, T} = \frac{M_A - M_V}{M_A - \omega(M_A - M_V)}, \quad (13)$$

qui, évalué aux conditions à l'infini donne,

$$\gamma = \frac{1}{\frac{M_A}{M_A - M_V} - \omega_\infty} \quad (14)$$

1.4 Fraction massique et fraction molaire

On a montré en cours que la fraction molaire s'exprime aussi en fonction des fractions molaires,

$$M = y_A M_A + y_B M_B. \quad (15)$$

En introduisant la fraction molaire de gaz $y_A = y$, on a

$$M = y M_A + (1 - y) M_v. \quad (16)$$

On a aussi montré en cours, que les fractions molaires et massiques sont liées par la relation,

$$\omega_A = \frac{y_A M_A}{M}, \quad \omega = \frac{y M_A}{M}. \quad (17)$$

2 Estimation de l'évaporation d'une piscine

2.1 Conditions isothermes, de jour

2.1.1 Fractions massiques et molaires d'air

L'air est sec au loin de la surface, on a donc,

$$\omega_\infty = 1 \quad (18)$$

A la surface de l'eau la vapeur est en équilibre thermodynamique avec le liquide. La pression de vapeur P_V est donnée par,

$$p_V = p_{V\text{sat}}(T_L) = 0,0425 \text{ bar.} \quad (19)$$

Pour un gaz parfait, la fraction molaire est liée à la pression partielle par,

$$y_V = \frac{p_V}{p} = \frac{0,0425}{1,01325} = 0,0419. \quad (20)$$

Pour calculer la fraction massique, on doit déterminer la masse molaire du mélange dans ces conditions.

$$M_i = y_V M_V + (1 - y_V) M_A = 28,54 \text{ g/mol} \quad (21)$$

La fraction molaire d'air est donnée par,

$$y_i = 1 - y_V = 0,9735 \quad (22)$$

La fraction massique d'air à la surface de l'eau est enfin donnée par,

$$\omega_i = \frac{y_i M_A}{M_i} = 0,9735 \quad (23)$$

2.1.2 Hypothèse des transferts de masse faibles

Pour déterminer l'importance des transferts de masse, on détermine le paramètre moteur du transfert de masse,

$$B = \frac{\omega_\infty - \omega_i}{\omega_i} = 0,0272 \ll 1 \quad (24)$$

2.1.3 Intensité des transferts de masse

On peut donc appliquer l'analogie entre transferts de masse et de chaleur sans correction. Cette analogie consiste à remplacer Nu par Sh et Pr par Sc dans le modèle de transfert. Le nombre de Sherwood mesure l'intensité du transfert de masse rapporté à une échelle purement diffusive. En variables massiques, on a,

$$\text{Sh} = \frac{j_V L}{\rho D (\omega_\infty - \omega_i)} = \frac{n_V \omega_i L}{\rho D (\omega_\infty - \omega_i)} \quad (25)$$

selon qu'on l'exprime avec le flux diffusif, selon sa définition originale, ou avec le flux total de vapeur. On a donné la définition du nombre de Gr et le nombre de Rayleigh est lié à ce dernier par,

$$\text{Ra} = \text{Gr Pr} = \frac{g[\beta(T - T_\infty) + \gamma(\omega_\infty - \omega_i)]L^3}{\alpha\nu} \quad (26)$$

Dans l'analogie, on transpose les nombre sans dimension et on conserve le domaine de validité. On a pour les transferts de chaleur,

$$\text{Nu} = f(\text{Gr Pr}), \quad \text{Sh} = f(\text{GrSc}) \quad (27)$$

où f est donné par l'une des deux équations de l'énoncé. On note parfois le produit $\text{GrSc} = \text{Ra}_m$. Sc et Pr sont définis par,

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Sc} = \frac{\nu}{D}. \quad (28)$$

Pour choisir le bon modèle, il faut déterminer le nombre de Rayleigh de masse Ra_m . Commençons la dilatabilité massique,

$$\gamma = \frac{1}{\frac{M_A}{M_A - M_V} - \omega_\infty} = 0,6111 \quad (29)$$

et le terme d'expansion,

$$\gamma(\omega_\infty - \omega_i) = 0,0162 \quad (30)$$

Au voisinage de la surface, le gaz est plus riche en vapeur, donc plus léger. L'effet de flottabilité est vers le haut. L'échelle de longueur du problème est donnée par,

$$L = \frac{A}{P} = 1,385 \quad (31)$$

On a, avec les données de l'énoncé,

$$\text{Ra}_m = \frac{g\gamma(\omega_\infty - \omega_i)L^3}{D\nu} = 1,021 \cdot 10^9 \quad (32)$$

Selon le critère donné dans l'énoncé, on est en régime turbulent et il faut choisir la seconde corrélation,

$$\text{Sh}_L = 0,14(\text{Ra}_m)^{1/3} \left(\frac{1 + 0,0107\text{Sc}}{1 + 0,01\text{Sc}} \right), \quad 10^7 < \text{Ra}_m < 2 \cdot 10^{11}, \quad 0,02 < \text{Sc} < 2000. \quad (33)$$

Numériquement on obtient,

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{D} = 0,6220, \quad \text{Sh}_L = 141,03 \quad (34)$$

Le flux total s'obtient avec la définition du nombre de Sherwood (25),

$$n_V = \text{Sh} \frac{\rho_D(\omega_\infty - \omega_i)}{\omega_i L} = 8,325 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^2/\text{s} \quad (35)$$

La variation de niveau s'obtient en effectuant un bilan de masse à l'interface, le liquide est stagnant,

$$\begin{aligned} -\frac{dh}{dt} &= \frac{n_V}{\rho_L} = 8,325 \cdot 10^{-8} \text{ m/s} \\ &= 8,325 \cdot 10^{-5} \text{ mm/s} \\ &= 2,997 \cdot 10^{-1} \text{ mm/h} \\ &= 2,398 \text{ mm/8h} \end{aligned} \quad (36)$$

On trouve bien l'ordre de grandeur de 1 cm/jour (7,2 mm/jour).

2.2 Conditions non isothermes, de nuit

De nuit, la convection thermique s'ajoute à la convection massique. En effet, au dessus de l'eau, on sait qu'en raison de la composition le gaz est plus léger qu'au loin. Il est maintenant plus chaud et l'effet de flottabilité est augmenté. On a

$$\beta = \frac{1}{T_\infty} = 3,411 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}, \beta(T_i - T_\infty) = 0,03411 \quad (37)$$

La composante massique de la flottabilité est identique à celle calculée de jour (30). L'effet de flottabilité total est donc maintenant,

$$\beta(T_i - T_\infty) + \gamma(\omega_\infty - \omega_i) = 0,0503 \quad (38)$$

En négligeant les variations des propriétés de transport, on observe que,

$$\text{Sh} \propto \text{Ra}_m^{\frac{1}{3}} \propto B^{\frac{1}{3}} \quad (39)$$

Le flux de masse et la variation de niveau étant directement proportionnels à Sh, on en déduit,

$$\frac{\frac{dh}{dt}_2}{\frac{dh}{dt}_1} = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{0,0503}{0,0160}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,465 \quad (40)$$

L'évaporation augmente de 50% la nuit.

$$\frac{dh}{dt} = 3,513 \text{ mm/8h} \quad (41)$$

Sur 24 heures on obtient 9 mm par jour. Si l'humidité de l'air n'est pas nulle, le taux d'évaporation étant proportionnel à la différence de fractions massiques, il suffit, pour obtenir un ordre de grandeur de faire une règle de trois en se basant sur les données d'un baromètre moderne fournissant l'humidité relative (consulter la documentation de l'appareil pour vérifier qu'il affiche effectivement le degré hygrométrique). Claudel (2007) donne les différentes grandeurs mesurant l'humidité. Notamment, le degré hygrométrique représente la pression partielle de vapeur de l'air rapportée à sa valeur maximale $p_{V\text{sat}}(T_\infty)$,

$$\varphi = \frac{p_{V\infty}}{p_{V\text{sat}}(T_\infty)} \quad (42)$$

2.3 Bonus

Pour moi, les messages importants sont principalement méthodologiques.

- Il n'est jamais interdit de réfléchir par soi-même.
- Les principes fondamentaux et les équations de bilan qu'on en déduit sont la base irréductible de toute modélisation.
- Il ne faut pas croire tout ce qui est écrit, même dans un livre, il faut faire l'effort de refaire les calculs. Au besoin lire l'auteur original des travaux étudiés dans le texte, et ne jamais se satisfaire de citations éventuellement, voire souvent, erronées.

Références

Claudel, B. 2007. Propriétés thermodynamiques des fluides. *Techniques de l'ingénieur*. B 8 020.