

Devoir surveillé de transferts couplés du 19 décembre 2007

Hervé Lemonnier, DER/SSTH/LIEX, CEA/Grenoble, 38054 Grenoble cedex 9
Tél. : 04 38 78 45 40, Fax : 04 38 78 50 45, Mél. : *herve.lemonnier@cea.fr*

Modalités

Le devoir comporte, d'une part, des questions de cours et, d'autre part, deux exercices indépendants. Tous les documents et moyens de calcul sont autorisés. On demande des réponses justifiées et concises qui peuvent éventuellement être accompagnées d'un croquis dont la légende sera bien explicitée. Il *est inutile de détailler* les développements analytiques pourvu que le passage d'une expression à la suivante soit expliqué avec soin.

1 Fraction massique, fraction molaire

Donner la définition de la fraction molaire et de la fraction massique. Quelles sont les unités dans lesquelles ces grandeurs sont exprimées. Pour un mélange de deux constituants A et B, montrer qu'il existe une relation simple entre la fraction massique du composé A et la fraction molaire des composés A et B.

2 Coefficient de diffusion binaire

Donner la définition du coefficient de diffusion binaire pour un liquide. Le modèle de Wilke et Chang permet d'estimer sa valeur dans les liquides. Quelle dépendance en température permet-il de décrire ?

3 Estimation du coefficient de diffusion du CO₂ dans l'eau

On veut estimer le coefficient de diffusion binaire du CO₂ dans l'eau à faible concentration, à 20°C et une atmosphère. A l'aide des documents fournis en cours estimer ce coefficient de deux façons différentes. On donne les valeurs suivantes relatives à la solution,

- Viscosité cinématique du mélange, $\nu_L = 1,66 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Pour la viscosité dynamique, on rappelle que $1\text{cp} = 10^{-3} \text{ Unité SI}$.
- Masse volumique du mélange, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Volume molaire du soluté, $V_A = 34 \text{ cm}^3/\text{mol}$
- Masse molaire de l'eau $M_B = 18 \text{ g/mol}$

4 Modélisation de la croissance des bulles de champagne

Il s'agit dans cet exercice d'estimer la vitesse de croissance de bulles de champagne lors de leur ascension dans un verre. On se basera sur les travaux de [Liger-Belair et al. \(2000\)](#) et [Liger-Belair et al. \(2002\)](#).

4.1 Concentration en CO₂ dans le champagne

Lorsque la bouteille est fermée, le gaz dissout est en équilibre avec le ciel de gaz (CO₂ pur). La pression dans la bouteille est estimée à 5 bar.

Quelle relation existe-il entre la pression dans la bouteille et la fraction molaire de CO₂ dissout ? On donne,

- La constante de Henry, $H = 1430$ bar à 20°C .
- La pression de vapeur saturante de l'eau $p_{\text{sat}} = 20$ mbar.

Calculer la fraction molaire de CO_2 dissout dans ces conditions. On notera x_∞ cette quantité. On donne les informations suivantes

- Masse molaire du champagne : $M_B = 18$ g/mole
- Masse volumique du champagne : $\rho_B = 998$ kg/m³

On supposera que la solution est très diluée. Calculer successivement la concentration molaire totale et la concentration en CO_2 dissout. On notera respectivement c et c_∞ ces quantités.

4.2 Concentration en CO_2 à l'interface des bulles

Les bulles sont observées à 5 cm sous la surface libre et ont un rayon de 250 μm environ. On considère qu'elles sont uniquement remplies de CO_2 . Estimer la pression dans les bulles de champagne et montrer qu'elle diffère peu de la pression atmosphérique.

- Tension superficielle mesurée : $\sigma = 46,8$ mN/m

Dans tout ce qui suit on considèra les phénomènes comme isobares et isothermes ($p = 1,013$ bar, $T = 20^\circ\text{C}$).

Quelle relation doit-il exister entre la pression dans la bulle et la fraction molaire en CO_2 dissout dans le liquide à l'interface. En déduire successivement, la fraction molaire de CO_2 dissout à l'interface (coté liquide) et la concentration correspondante. On notera x_i et c_i les valeurs correspondantes.

4.3 Vitesse d'ascension des bulles

On suppose que les bulles ont atteint leur vitesse terminale d'ascension. Cette vitesse peut s'estimer par l'équilibre de la traînée de Stokes et des forces d'Archimède. Par ailleurs, on peut montrer que la rigidité de l'interface intervient au second ordre et cette vitesse est donnée par la relation suivante,

$$U = \frac{2\alpha g R^2}{9 \nu_L}, \quad 0,6 < \alpha < 0,9 \quad (1)$$

où ν_L est la viscosité cinématique du liquide.

Estimer la vitesse d'ascension d'une bulle de 250 μm de rayon. On prendra les valeurs suivantes recommandées ou mesurées par les auteurs de l'étude,

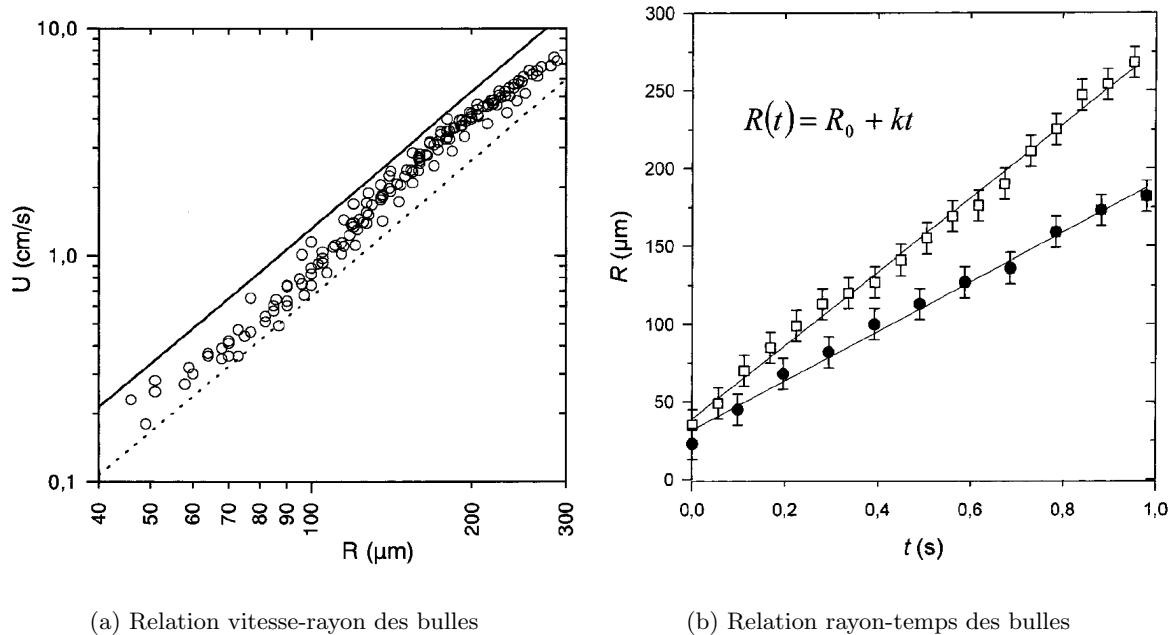
- Rayon de la bulle : $R = 250$ μm ,
- Viscosité dynamique du liquide : $1,48 \cdot 10^{-3}$ Pa s
- Coefficient $\alpha = 0,75$.

Soit U cette valeur. Comparez-là avec les observation rapportées à la figure 1(a). Que constatez-vous?

4.4 Transfert de masse entre le liquide et les bulles

On rappelle les définitions suivantes pour les nombres sans dimensions à considérer.

- Nombre de Reynolds de la bulle : $\text{Re} = \frac{UD}{\nu_L}$
- Nombre de Schmidt du CO_2 dans le liquide : $\text{Sc} = \frac{\nu_L}{D_{AB}}$
- Nombre de Sherwood de la bulle (transfert coté liquide) : $\text{Sh} = \frac{k_L D}{D_{AB}}$.



(a) Relation vitesse-rayon des bulles

(b) Relation rayon-temps des bulles

Figure 1: (a) Détermination expérimentale des vitesses d'ascension des bulles de champagne dans un verre d'après Liger-Belair *et al.* (2000). (b) Evolution du rayon d'une bulle de champagne: symboles blancs, 3 minutes après l'ouverture de la bouteille et symboles noirs, une heure après. Les bulles sont issues du même site de nucléation situé sur la paroi du verre d'après Liger-Belair *et al.* (2002).

où D est le diamètre de la bulle. Donner la signification physique de ces nombres sans dimension.

En régime de Stokes on supposera que le transfert de masse est donné par la relation suivante,

$$\text{Sh} = 1,01(\text{ReSc})^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

Pouvez-vous justifier très simplement ce choix?

- La constante de diffusion du CO_2 dans le champagne a été déterminée par RMN (Liger-Belair *et al.*, 2003). On prendra: $D_{AB} = 1,41 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$.

Calculer successivement ces nombres sans dimension et estimer le coefficient de transfert de masse de la bulle. On notera k_L cette valeur.

4.5 Flux de matière et taux de croissance des bulles

Rapeller la définition du coefficient de transfert de masse. Calculer la densité de flux de diffusion molaire à travers l'interface pour les conditions considérées. On notera N_A cette valeur.

En déduire la densité de flux de masse correspondante. Soit n_A cette valeur. On donne la masse molaire du CO_2 , $M_B = 44 \text{ g/mole}$.

Calculer ensuite le débit masse de CO_2 traversant l'interface. Soit \dot{M}_A cette valeur.

Calculer la masse volumique du CO_2 dans la bulle. On considère le gaz parfait et on donne la constante des gaz parfaits molaire $R = 8,314 \text{ J/mole/K}$. Soit ρ_A cette valeur.

Montrer que le bilan de masse de la bulle peut s'écrire,

$$\pi D^2 \rho_A \frac{dR}{dt} = \dot{M}_A \quad (3)$$

En déduire le taux de variation du rayon de la bulle. Comparer cette valeur à celle déterminée à partir des données de la figure 1(b). On considérera les données collectées 3 minutes après l'ouverture de la bouteille. Commenter votre résultat.

4.6 Questions bonus

Quelle est d'après-vous la raison pour laquelle le taux de croissance des bulles diminue avec le temps (voir figure 1(b))?

En supposant que modèle que nous venons d'établir est correct, que peut-on mesurer indirectement à partir de l'observation de la croissance des bulles de champagne?

Références

- Liger-Belair, G., Marchal, R., Robillard, B., Dambrouck, T., Maujean, A., Vignes-Adler, M., & Jeandet, P. 2000. On the velocity of expanding spherical gas bubbles rising in line in supersaturated hydroalcoholic solutions: application to bubble trains in carbonated beverages. *Langmuir*, **16**, 1889–1895.
- Liger-Belair, G., Vignes-Adler, M., Voisin, C., Robillard, B., & Jeandet, P. 2002. Kinetics of gas discharging in a glass of champagne: the role of nucleation sites. *Langmuir*, **18**, 1294–1301.
- Liger-Belair, G., Prost, E., Parmentier, M., Jeandet, P., & Muzillard, J.-M. 2003. Diffusion coefficient of CO₂ molecules as determined by ¹³C NMR in various carbonated beverages. *J. Agric. Food Chem.*, **51**, 7560–7563.