Devoir surveillé de transferts couplés de décembre 2008

Hervé Lemonnier, DTN/SE2T/LIEX, CEA/Grenoble, 38054 Grenoble cedex 9
Tél. : 04 38 78 45 40, Fax : 04 38 78 50 45, Mél. : *herve.lemonnier@cea.fr*

Modalités

Le devoir comporte deux exercices indépendants. Pour faire le second exercice, on pourra considérer les résultats du premier comme acquis. Tous les documents et moyens de calcul sont autorisés. On demande des réponses justifiées et concises qui peuvent éventuellement être accompagnées d'un croquis dont la légende sera bien explicitée. Il *est inutile de détailler* les développements analytiques pourvu que le passage d'une expression à la suivante soit expliqué avec soin. L'évaluation tiendra compte de la qualité des justifications.

1 Convection naturelle massique

En convection naturelle thermique et massique le long d'une paroi verticale, le bilan de quantité de mouvement projeté le long de la paroi, comporte une force de volume, B,

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B \tag{1}$$

où u et v sont respectivement les composantes verticale (ascendante) et horizontale (positive vers le fluide) de la vitesse, ρ est la masse volumique et x et y sont les coordonnées correspondantes. Dans l'hypothèse de la couche limite, on montre que,

$$B = (\rho_\infty - \rho) g \tag{2}$$

où ρ dépend de la température et de la composition du mélange. On considère un mélange d'air et de vapeur d'eau et on admettra que le mélange se comporte comme un gaz parfait. Son équation d'état est donc,

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\tilde{R} T}{M} \tag{3}$$

où la constante des gaz parfait $\tilde{R} = 8{,}31451$ J/mol/K et M est la masse molaire du mélange.

1.1 Masse molaire du mélange

On considère un mélange de gaz constitué de vapeur d'eau, de masse molaire M_V=18 g/mol et d'air de masse molaire $M_A = 29$ g/mol. Soit ω la fraction massique d'air dans le mélange. Calculer la masse molaire du mélange M en fonction de la fraction massique d'air $M(\omega)$. On demande d'exprimer le résultat en fonction de la masse molaire des constituants et de la fraction massique d'air uniquement. On ne demande pas de refaire la démonstration donnée en cours.

1.2 Approximation de Boussinesq

Dans l'approximation de Boussinesq, on remplace dans toutes les équations, la masse volumique ρ par ρ_∞, la masse volumique aux conditions loin de la plaque à la même altitude. On fait cependant exception pour les forces de volume, B, où l'on effectue un développement limité en température et en composition autour des conditions au loin de la plaque, que l'on désignera par l'indice ∞. Montrer que l'on peut exprimer B sous la forme,

$$B = \rho_\infty g \left[\beta (T - T_\infty) - \gamma(\omega - \omega_\infty)\right] \tag{4}$$

avec les définitions suivantes,

$$\beta \triangleq -\frac{1}{\rho_\infty}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p,\omega,\infty}, \quad \gamma \triangleq \frac{1}{\rho_\infty}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega}\right)_{p,T,\infty} \tag{5}$$

1.3 Application aux gaz parfaits

Montrer que pour un mélange de gaz parfaits, on a,

$$\beta = \frac{1}{T_\infty}, \quad \gamma = \frac{1}{\frac{M_A}{M_A - M_V} - \omega_\infty} \tag{6}$$

1.4 Fraction massique et fraction molaire

Soit y la fraction molaire d'air dans le mélange. Montrer que l'on peut aussi exprimer la masse molaire du mélange en fonction de y et des masses molaires des constituants, $M(y)$. Montrer, de plus, que la fraction molaire d'air et la fraction massique d'air sont liées par la relation,

$$\omega = \frac{y M_A}{M(y)} \tag{7}$$

On ne demande pas de refaire les démonstrations données en cours.

2 Estimation de l'évaporation d'une piscine

Les propriétaires de piscine savent qu'il faut quotidiennement ajuster le niveau d'eau d'une piscine en été. Pour des conditions estivales courantes, la perte de niveau quotidienne est de l'ordre du cm par jour. L'objet de cet exercice est d'estimer cette quantité en effectuant un calcul simple de transfert de masse.

En absence de vent, on admettra que le seul mécanisme d'évaporation est la convection naturelle. On montrera dans un premier temps que l'on peut appliquer l'analogie entre transfert de masse et de chaleur. Lienhard IV & Lienhard V (2008, p. 422) donne les relations suivantes pour déterminer l'intensité des transferts de chaleur moyennés sur la surface d'une plaque plane horizontale, en situation de convection naturelle,

$$\mathrm{Nu}_L = \frac{0{,}560(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{1/4}}{\left[1 + (0{,}4921\,\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{4/9}}, \quad \mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr} < 10^7 \tag{8}$$

$$\mathrm{Nu}_L = 0{,}14(\mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr})^{1/3}\left(\frac{1+0{,}0107\,\mathrm{Pr}}{1+0{,}01\,\mathrm{Pr}}\right), \quad 10^7 < \mathrm{Gr}_L\,\mathrm{Pr} < 2\,10^{11}, \quad 0{,}02 < \mathrm{Pr} < 2000. \tag{9}$$

où l'échelle de longueur entrant dans les nombres de Grashof, Gr, et de Nusselt, Nu, est définie par,

$$L = \frac{A}{P}, \tag{10}$$

où A est la surface de la plaque et P son périmètre. On rappelle que le nombre de Grashof est défini par,

$$\mathrm{Gr}_L = \frac{g\left[\beta(T - T_\infty) - \gamma(\omega - \omega_\infty)\right] L^3}{\nu^2} \tag{11}$$

2.1 Conditions isothermes, de jour

On s'interesse à un bassin de 4 mètres de largeur et de 9 mètres de long. On considère ici que le température de l'eau et de l'air sont identiques et égales à $T_L = T_\infty = 30^o$C. L'air ambiant sera considéré comme sec et donc constitué uniquement d'air. On donne la pression de coexistence de l'eau liquide et de sa vapeur à cette température, $p_{V\text{sat}} = 0{,}0425$ bar, on considère que la pression atmosphérique est $p = 1{,}01325$ bar.

2.1.1 Fractions massiques et molaires d'air

Déterminer successivement, la fraction massique d'air au loin de la surface du bassin, ω_∞, et à son voisinage immédiat, ω_i.

2.1.2 Hypothèse des transferts de masse faibles

Justifiez que l'intensité des transferts de masse sont faibles et principalement diffusifs et qu'on peut, en conséquence, utiliser l'analogie entre transferts de chaleur et de masse.

2.1.3 Intensité des transferts de masse

En utilisant l'analogie entre transferts de masse et de chaleur, montrer que les équations (8) ou (9) permettent de calculer le transfert de masse sans dimension en fonction de deux nombres sans dimension. 0n rappellera la définition de ces trois nombres et on utilisera les grandeurs massiques.

2.1.4 Flux d'évaporation

Déterminer numériquement le flux massique total d'évaporation n. L'exprimer le résultat en kg/m^2/h. On donne les propriétés de transport suivantes pour le mélange, évaluées à la composition du film (en fait celles de l'air),

$$D_{VA} = 2{,}578\,10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}, \quad \nu = 1{,}6035\,10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}, \quad \alpha = 2{,}253\,10^{-5}\ \text{m/sq/s}, \quad \rho = 1{,}1650\ \text{kg/m}^3$$

En considérant que la masse volumique de l'eau, ρ_L, est de 1000 kg/m^3 environ, déterminer la variation de niveau du bassin en 8 heures, pour des conditions atmosphériques constantes.

2.2 Conditions non isothermes, de nuit

On considère maintenant que la température de l'air ambiant est $T_\infty = 20^o$C et que la température de l'eau est inchangée, $T_L = 30^o$C. En négligeant les variations des propriétés de transport par rapport à la température et à la composition, montrer que le flux massique d'évaporation n est proportionnel aux effets de flottabilité B élevés à une puissance m qu'on déterminera.

En déduire la variation du niveau pour 8 heures dans les conditions non isothermes considérées dans cette question. Qu'en déduisez-vous pratiquement ?

2.3 Bonus

Quels sont à votre avis les trois messages les plus importants que vous avez retenus du cours ?

Références

Lienhard IV, J., & Lienhard V, J. 2008. *A heat transfer textbook*. Third edn. Phlogiston Press.