UNE INTRODUCTION AUX ECOULEMENTS DIPHASIQUES

Les équations de bilan des écoulements diphasiques

HERVE LEMONNIER

DM2S/STMF/LIEFT, CEA/Grenoble, 38054 Grenoble Cedex 9

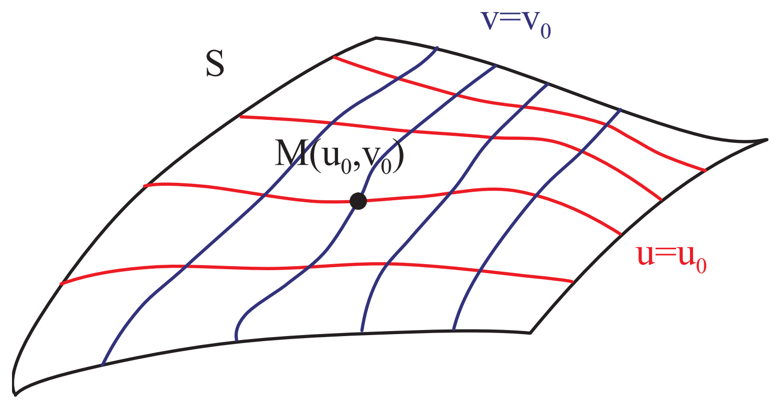
Tél. 04 38 78 45 40, *herve.lemonnier@cea.fr*

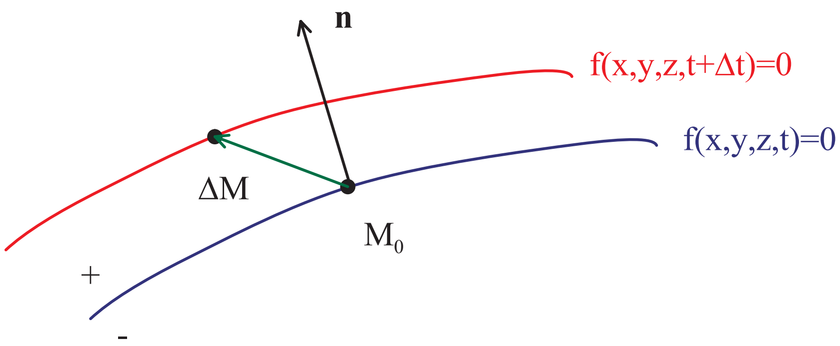
Phelma 2012-2013

ETABLISSEMENT DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

1. Principes fondamentaux (4+1)
   - La règle de Leibniz et le théorème de Gauss.
   - Volumes matériels et arbitraires.
2. Equations de bilan locales et instantanées monophasiques. Le problème de fermeture (I).
   - Volume fixe avec une interface (surface de discontinuité).
3. Equations de bilan locales et instantanées de chaque phase et à l'interface.
   - Moyenne sur la section : les modèles 1D.
   - Moyenne temporelle : CMFD, modèles 3D (à la Reynolds).
   - Moyennes composites T/E : le modèle à deux fluides.
4. Le problème de fermeture (II).

OUTILS MATHÉMATIQUES





- Vitesse de déplacement d'une surface S :

$$\mathbf{v}_S \triangleq \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\right)_{u,v}$$

- Dépend du paramétrage.

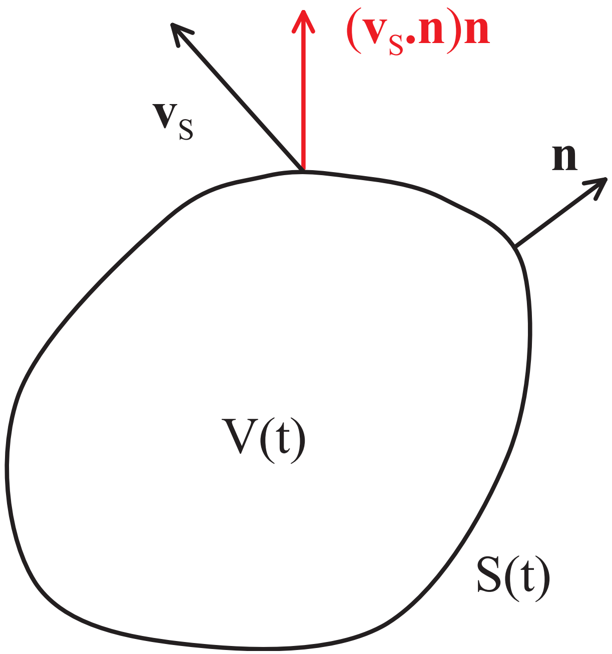
- Equation implicite : $f(x,y,z,t) \leqslant 0$, dans V,

$$f(x,y,z,t+\Delta t) = f(x_0,y_0,z_0,t)$$
$$+\nabla f(M_0)\cdot\Delta M + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \cdots$$

- Vitesse de déplacement géométrique (intrinsèque) :

$$\mathbf{v}_S\cdot\mathbf{n} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta M}{\Delta t} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial t}}{|\nabla f|}$$

RÈGLE DE LEIBNIZ

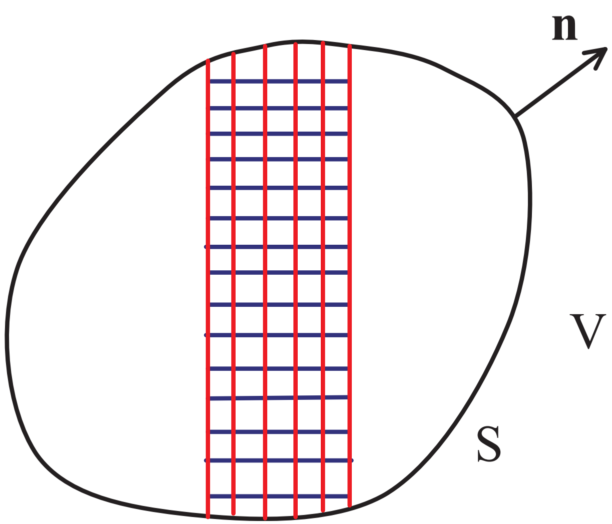


- Extension de la règle de dérivation sous le signe somme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} f\,\mathrm{d}V = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_{S(t)} f\,\mathbf{v}_S\,\mathbf{.}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

- Théorème géométrique, S quelconque.
- **n**, toujours dirigé vers l'extérieur.
- Usage 1 : commutation intégration espace-dérivation en temps,
- Usage 2 : énoncé des principes sur un volume matériel ou quelconque.

THÉORÈME DE GAUSS



- Divergence : flux par unité de volume :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} \triangleq \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{V_\epsilon} \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \, \mathrm{d}S$$

- Théorème de la divergence, Gauss-Otstrodradski (Green) :

$$\int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{B} \, \mathrm{d}V = \int_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \, \mathrm{d}S$$

- Théorème géométrique, S et V quelconques, $\mathbf{n}$ et ∇ du même coté. $\mathbf{n}$, pointant vers extérieur. $\mathbf{B}$ tenseur quelconque.
- Usage : certaines intégrales de volume $\Leftrightarrow$ intégrales de surface.

VOLUMES MATERIELS ET VOLUMES ARBITRAIRES

- Un volume matériel en MMC est un système fermé pour la thermodynamique.
- Soit $V_m(t)$, limité par $S_m(t)$, un volume matériel, $\mathbf{v}_{S_m} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, par définition.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_m(t)} f \,\mathrm{d}V = \int_{V_m(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{S_m(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

- Soit $V(t)$ arbitraire qui coincide avec $V_m(t)$ à l'instant t.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} f \,\mathrm{d}V = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{S(t)} f \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

- Identité (1) : quelque soit $V(t)$ qui coincide avec $V_m(t)$ à t,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_m(t)} f \,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} f \,\mathrm{d}V + \int_{S(t)} f (\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S} \qquad (1)$$

EXEMPLE : LE BILAN DE MASSE

- Enoncé du principe : la masse d'un volume matériel est constante.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_m(t)} \rho \,\mathrm{d}V = 0$$

- Identité (1) avec $f = \rho$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\int_{V(t)} \rho \,\mathrm{d}V}_{\text{Masse de } V,\ m} + \underbrace{\int_{S(t)} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S}_{\text{Flux net quittant } S,\ M} = 0$$

- Autre énoncé : la variation de la masse, m, de V (quelconque) égale le flux entrant, $-M$.

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + M = 0, \quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -M$$

- Les principes fondamentaux s'expriment sur des volumes matériels ou arbitraires. Ces énoncés sont **équivalents**.

LE BILAN DE MASSE

- La variation de la masse du volume V égale le débit masse *entrant* par sa surface S ($\forall V$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \,\mathrm{d}V = -\int_S \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_S) \,\mathbf{.}\, \mathbf{n} \,\mathrm{d}S. \tag{2}$$

- Cas particuliers,
  - Le volume est fixe, $\mathbf{v}_S \,\mathbf{.}\, \mathbf{n} = 0$,
  - Pour un volume matériel, $\mathbf{v}_S \,\mathbf{.}\, \mathbf{n} = \mathbf{v} \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}$

BILAN (DE MASSE) DES ESPECES

- La variation de la masse du composant α contenue dans V (quelconque) égale (i) le débit masse de α entrant à travers S et (ii) la production dans le volume V ($\forall V$).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho_\alpha \,\mathrm{d}V = -\int_S \rho_\alpha(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_S)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_V r_\alpha \,\mathrm{d}V$$

- Le bilan de masse du mélange est la somme sur α des bilans des espèces.
- $\sum_\alpha r_\alpha = 0$.
- Production : redistribution, pas de création de masse nette.

BILAN DE QUANTITE DE MOUVEMENT

- La variation de la quantité de mouvement de V (quelconque) égale (i) le débit de qdm entrant à travers la surface S et (ii) les forces appliquées $(\forall V)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\mathbf{v}\,\mathrm{d}V = -\int_S \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}-\mathbf{v}_S)\,\boldsymbol{.}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_S \mathbf{n}\,\boldsymbol{.}\,\mathbb{T}\,\mathrm{d}S + \int_V \rho\mathbf{g}\,\mathrm{d}V \qquad (3)$$

- $\mathbb{T}$: Tenseur des contraintes, $\mathbf{F}_S = \mathbf{n}\,\boldsymbol{.}\,\mathbb{T}$.
- $\mathbf{g}$: Forces de volume, par unité de masse.
- NB : le bilan de qdm est une équation vectorielle.

BILAN DU MOMENT DE QUANTITE DE MVT

- La variation du moment de la qdm de V (quelconque) égale (i) le débit de moment de qdm entrant à travers S et (ii) couples appliqués ($\forall V$).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\mathbf{r}\times\mathbf{v}\,\mathrm{d}V = -\int_S \rho\mathbf{r}\times\mathbf{v}(\mathbf{v}-\mathbf{v}_S)\,\mathbf{.}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_S \mathbf{r}\times(\mathbf{n}\,\mathbf{.}\,\mathbb{T})\,\mathrm{d}S + \int_V \mathbf{r}\times\rho\mathbf{g}\,\mathrm{d}V \quad (4)$$

- Lorsque les couples appliqués sont les moments des forces appliquées (fluides non polaires). Si 2 propositions sont vraies, la troisième aussi,
  - Le tenseur des contraintes est symétrique.
  - Le bilan de quantité de mouvement est vérifié.
  - Le bilan du moment de la quantité de mouvement est vérifié.

BILAN D'ENERGIE (TOTALE)

- Enoncé du premier principe. La variation de l'énergie interne d'un système fermé égale (i) la puissance des efforts appliqués et (ii) la puissance thermique *fournie* au système.

- La variation de l'énergie totale (interne et mécanique) de V (quelconque) égale la somme (i) de débit d'énergie totale entrant à travers sa surface, (ii) la puissance des efforts appliqués, (iii) la puissance thermique *apportée* $(\forall V)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\left(u+\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right)\mathrm{d}V = -\int_S \rho\left(u+\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_S)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_S (\mathbf{n}\cdot\mathbb{T})\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}S + \int_V \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}V - \int_S \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_V q'''\,\mathrm{d}V \tag{5}$$

- q''': sources volumiques de chaleur (effet Joule, absorption rayonnement, *etc.*). **Exclure** : celles d'origine thermodynamique, chaleur de réaction, transition de phase de tout ordre (EOS)...

- L'évolution est réversible ou irréversible.

SECOND PRINCIPE ET BILAN D'ENTROPIE

- Enoncé du second principe : la variation d'entropie d'un système fermé et isolé ne peut que croître.
- La variation d'entropie du volume V égale la somme (i) du débit d'entropie entrant à travers sa surface, (ii) de l'entropie apportée au système de manière réversible, (iii) des sources d'entropie. ($\forall V$).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho s \,\mathrm{d}V = -\int_S \rho s(\mathbf{v}-\mathbf{v}_S)\,\mathbf{.}\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S - \int_S \mathbf{n}\,\mathbf{.}\,\mathbf{j}_s\,\mathrm{d}S + \int_V \frac{q'''}{T}\,\mathrm{d}V + \int_V \sigma\,\mathrm{d}V, \qquad (6)$$
$$\sigma \geqslant 0.$$

- Dans ce cadre, le second principe est "seulement", $\sigma \geqslant 0$.
- Par définition, évolution réversible, $\sigma = 0$.

EQUATION DE BILAN GENERALISEE

Les équations de bilan ont une forme analogue,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\psi\,\mathrm{d}V = -\int_S \mathbf{n}\,.\,\rho(\mathbf{v}-\mathbf{v}_S)\psi\,\mathrm{d}S - \int_S \mathbf{n}\,.\,\mathbf{j}_\psi\,\mathrm{d}S + \int_V \phi_\psi \mathrm{d}V.$$

Bilan	ψ	$\mathbf{j}_\psi$	ϕ_ψ
Masse	1		
Espèces α	ω_α	$\mathbf{j}_\alpha$	r_α
Q. de mouvement	$\mathbf{v}$	$-\mathbb{T}$	$\rho\mathbf{g}$
Momement QDM	$\mathbf{r}\times\mathbf{v}$	$-\mathbb{T}\,.\,\mathbb{R}^{(*)}$	$\mathbf{r}\times\rho\mathbf{g}$
Energie totale	$u+\frac{1}{2}\mathrm{v}^2$	$\mathbf{q}-\mathbb{T}\,.\,\mathbf{v}$	$\rho\mathbf{g}\,.\,\mathbf{v}+q'''$
Entropie	s	$\mathbf{j}_s$	$\sigma+\frac{q'''}{T}$

$$(*)\mathbb{R},\ R_{ij}=\epsilon_{ijk}r_k$$

EQUATIONS LOCALES PRIMAIRES

Règle de Leibniz,

$$\int_V \frac{\partial \rho \psi}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\int_S \mathbf{n}\cdot\rho\mathbf{v}\psi\,\mathrm{d}S - \int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{j}_\psi\,\mathrm{d}S + \int_V \phi_\psi \mathrm{d}V.$$

Théorème de Gauss, $\forall V \subset D_f$,

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho\psi}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\psi) + \nabla\cdot\mathbf{j}_\psi - \phi_\psi\right]\mathrm{d}V = 0$$

Equations de bilan locale et instantanées, dites *primaires*,

$$\boxed{\frac{\partial \rho\psi}{\partial t} = \underbrace{-\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\psi)}_{\text{Convection}}\ \underbrace{-\nabla\cdot\mathbf{j}_\psi}_{\text{Diffusion}}\ \underbrace{+\phi_\psi}_{\text{Source}}}$$

Bilan sur un volume fixe infinitesimal, **strictement équivalent** aux principes fondamentaux.

FLUX TOTAL

Forme dite des flux totaux (Bird *et al.* , 2007), écoulements stationnaires.

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\psi^t + \phi_\psi$$

Bilan	flux total $\mathbf{j}_\psi^t$	flux convectif $\rho\psi\mathbf{v}$	flux diffusif $\mathbf{j}_\psi$
Mass	$\mathbf{n} =$	$\rho\mathbf{v}$	
Species	$\mathbf{n}_\alpha =$	$\rho\omega_\alpha\mathbf{v}$	$\mathbf{j}_\alpha$
Momentum	$\phi =$	$\rho\mathbf{v}\mathbf{v}$	$-\mathbb{T}$
Total energy	$\mathbf{e} =$	$\rho\mathbf{v}\left(u + \frac{1}{2}v^2\right)$	$\mathbf{q} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{v}$
Entropy	$\mathbf{j}_s^t =$	$\rho s\mathbf{v}$	$\mathbf{j}_s$

NB: Certains auteurs utilisent des conventions de signe différentes pour les flux diffusifs : "pêche aux équations" interdite...

FORME CONVECTIVE

Combinaison avec le bilan de masse,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

Développer les produits,

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \psi) - \nabla \cdot \mathbf{j}_\psi + \phi_\psi$$

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\psi \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \psi - \nabla \cdot \mathbf{j}_\psi + \phi_\psi$$

Définition de la dérivée convective:

$$\frac{\mathrm{D} f}{\mathrm{D} t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$$

$$\boxed{\rho \frac{\mathrm{D} \psi}{\mathrm{D} t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\psi + \phi_\psi}$$

Bilan sur un volume matériel infinitésimal. Seulement les flux diffusifs. Utile pour les équations secondaires.

ORGANIGRAMME DES EQS DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Pour un fluide pur, volume de contrôle arbitraire,

- Bilan de masse (2)
- Bilan de quantité de mouvement (3)
- Bilan du moment de la qdm (4)
- Bilan d'énergie totale (5)
- Inégalité entropique (6)

Equations de bilan locales et instantanées primaires,

(2)$\rightarrow$ Bilan de masse (7)

(3)$\rightarrow$ Bilan de quantité de mouvement (8)

(4)$\rightarrow$ Symétrie du tenseur des contraintes

(5)$\rightarrow$ Bilan d'énergie totale (9)

(7)$\rightarrow$ Inégalité entropique (10)

EQUATIONS LOCALES INSTANTANÉES PRIMAIRES

- Rappel de la forme générale :

$$\frac{\partial \rho\psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \psi) + \nabla \cdot \mathbf{j}_\psi - \phi_\psi = 0$$

- ψ, quantité transportée, $\mathbf{j}_\psi$, flux diffusif, ϕ_ψ, sources volumiques.

Bilan	ψ	$\mathbf{j}_\psi$	ϕ_ψ
Masse (7)	1		
Esp. α	ω_α	$\mathbf{j}_\alpha$	r_α
Q. de mouvement (8)	$\mathbf{v}$	$-\mathbb{T}$	$\rho\mathbf{g}$
Energie totale (9)	$u + \frac{1}{2}\mathrm{v}^2$	$\mathbf{q} - \mathbb{T} \cdot \mathbf{v}$	$\rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + q'''$
Entropie (10)	s	$\mathbf{j}_s$	$\sigma + \frac{q'''}{T}$

EQUATIONS DE LA MMC (SUITE)

Equations de bilans dites *secondaires*, pour un fluide pur,

- Bilan d'énergie mécanique, (11) $\mathbf{.v}$ bilan de qdm.
- Bilan d'énergie interne (12), bilan d'énergie totale (9)-(11).
- Bilan d'enthalpie (13). (12), $h \triangleq u + p/\rho$
- Bilan d'entropie (14), (11), $\mathrm{d}u = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}v$ (Gibbs).
- (14) comparé avec l'inégalité entropique (9), fournit $\mathbf{j}_s$ and σ.

LE PROBLEME DE FERMETURE (I)

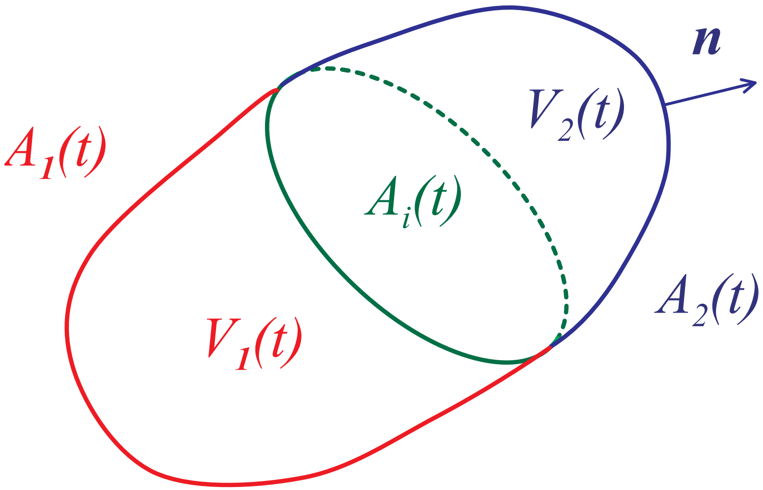
- Dans équations de bilan,
  - Variables locales, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_\alpha$, p, u, etc.
  - Flux inconnus, $\mathbf{j}_\alpha$, $\mathbb{T}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{j}_s$. NB: $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{V}$
  - Sources inconnues, r_α, σ.
- Les principes fondamentaux ne fournissent aucune expression pour ces flux.

  Les équations de la MMC ne sont pas fermées.
- Une interprétation du second principe,
  - Fournit les sources d'entropie. Pour un fluide pur, $T\sigma = \mathbf{q} \cdot \nabla T + \mathbb{V} : \nabla \mathbf{v}$.
  - Fournit les conditions d'équilibre thermodynamique, $\sigma = 0$,
  - Contraint les fermetures pour assurer le retour à l'équilibre. Hypothèse de linéarité, propriétés de transport,

$$\mathbb{T} = \mu(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla) + (\zeta - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \mathbf{v}\mathbb{I}, \quad \mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad \mu,\ \zeta, \kappa \geqslant 0$$

  - les propriétés de transport doivent être mesurées ou modélisées en dehors de la MMC.

EQUATIONS DE BILAN DIPHASIQUES



- Exemple : bilan de masse, $V = V_1 \cup V_2$, $A = A_1 \cup A_2$ fixes. Interfaces : zones de discontinuité.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \,\mathrm{d}V = -\int_A \rho \mathbf{v} \,\mathbf{.}\, \mathbf{n} \,\mathrm{d}S, \quad \forall V$$

- Contributions V_1 et V_2, pour V_1 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_1} \rho \,\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_2} \rho \,\mathrm{d}V = -\int_{A_1} \rho \mathbf{v} \,\mathbf{.}\, \mathbf{n} \,\mathrm{d}S - \int_{A_2} \rho \mathbf{v} \,\mathbf{.}\, \mathbf{n} \,\mathrm{d}S$$

- Règle de Leibniz, $V_1(t)$ mobile :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_1} \rho_1 \,\mathrm{d}V = \int_{V_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \,\mathrm{d}V + \int_{A_i(t)} \rho_1 \mathbf{v}_{A_i} \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_1 \,\mathrm{d}A$$

- Théorème de Gauss :

$$\int_{A_1} \rho \mathbf{v}_1 \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_1 \,\mathrm{d}S = \int_{V_1} \nabla \,\mathbf{.}\, (\rho_1 \mathbf{v}_1) \,\mathrm{d}V - \int_{A_i} \rho_1 \mathbf{v}_1 \,\mathbf{.}\, \mathbf{n} \,\mathrm{d}A$$

- Même procédure pour V_2, somme des deux contributions,

BILAN DE MASSE DIPHASIQUE

- Somme des contributions, $\forall V$,

$$\sum_{k=1}^{2} \int_{V_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) \right) \mathrm{d}V - \int_{A_i} \left(\rho_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i) + \rho_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_i) \right) \mathrm{d}A = 0$$

- Bilan de masse local, $k = 1, 2$, en tous points de V_k (EDP),

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) = 0$$

- En tous points de l'interface, relation de saut,

$$\underbrace{\rho_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_1}_{\dot{m}_1} + \underbrace{\rho_2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_2}_{\dot{m}_2} = 0$$

- Bilan de masse de l'interface, $\dot{m}_k = \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_k$.

FORME GÉNÉRALE DES BILANS

- Même démonstration pour tous les bilans, $\forall V$

$$\sum_{k=1}^{2} \int_{V_k} \left(\frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot (\mathbf{j}_{\psi k}) - \phi_k \right) \mathrm{d}V$$

$$- \int_{A_i} \sum_{k=1}^{2} (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{j}_{\psi k} + \phi_i) \, \mathrm{d}A = 0$$

- En tous points de chaque phase,

$$\frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{v}_k) + \nabla \cdot (\mathbf{j}_{\psi k}) - \phi_k = 0$$

- En tous points de l'interface,

$$\sum_{k=1}^{2} (\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{j}_{\psi k} + \phi_i) = 0$$

- ϕ_i : source d'entropie à l'interface.

BILANS LOCAUX INSTANTANÉS

- Bilan de masse,

$$\rho_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i) \mathbin{\mathbf{.}} \mathbf{n}_1 + \rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_i) \mathbin{\mathbf{.}} \mathbf{n}_2 = 0$$

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0$$

- Pas de changement de phase : $\dot{m}_k = 0$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 0$$

- On admet : pas de glissement à l'interface ($\phi_i = 0$)

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i) \mathbin{\mathbf{.}} \mathbf{n}_1 = 0, \quad (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_i) \mathbin{\mathbf{.}} \mathbf{n}_2 = 0$$

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \mathbin{\mathbf{.}} \mathbf{n}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$$

BILANS AUX INTERFACES

- Bilan de quantité de mouvement,

$$\dot{m}_1\mathbf{v}_1 + \dot{m}_2\mathbf{v}_2 - \mathbf{n}_1 \,\boldsymbol{.}\, \mathbb{T}_1 - \mathbf{n}_2 \,\boldsymbol{.}\, \mathbb{T}_2 = 0$$

- Cas particulier, pas de viscosité, $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mathbb{V}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^t + \mathbf{v}^n$, $\mathbf{v}^n = \mathbf{n}(\mathbf{v} \,\boldsymbol{.}\, \mathbf{n})$,

$$\begin{cases} \dot{m}_1(\mathbf{v}_1^n - \mathbf{v}_2^n) + (p_1 - p_2)\mathbf{n}_1 = 0 \\ \mathbf{v}_1^t = \mathbf{v}_2^t \end{cases}$$

- Cas général,

$$\dot{m}_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (p_1 - p_2)\mathbf{n}_1 - (\mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2) \,\boldsymbol{.}\, \mathbf{n}_1 = 0$$

BILANS AUX INTERFACES

- Cas particulier : 1D, $\mathbf{v}_k(x) \perp$ interface

$$\perp : \quad \dot{m}_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}_1 + (p_1 - p_2) - \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2) \cdot \mathbf{n}_1 = 0$$

- 1D incompressible, $\frac{\mathrm{d}v_k}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \mathbb{V}_k = 0$,

$$\dot{m}_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}_1 + (p_1 - p_2) = 0$$

- Bilan de masse, définition : $\dot{m}_k = \rho_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_k$,

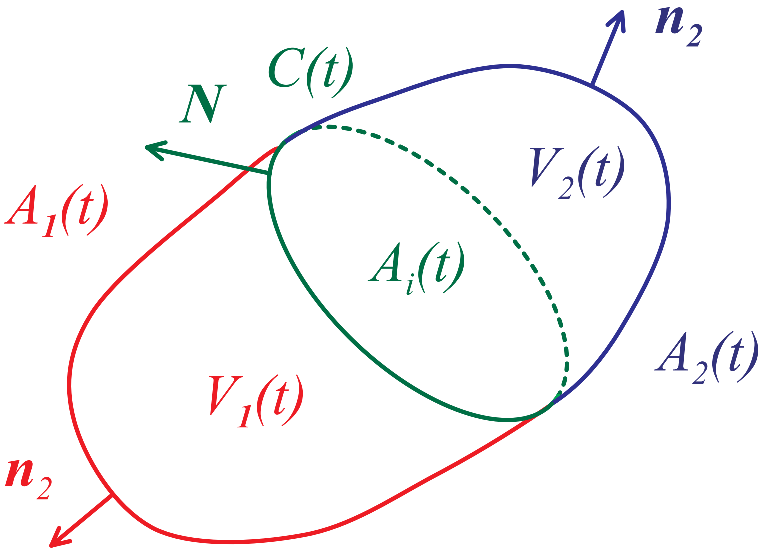
$$\dot{m}_1 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}_1$$

- A l'interface, saut de pression, force de recul,

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \dot{m}_1^2.$$

- $p_1 - p_2 \propto \rho_1 - \rho_2$ pour $\dot{m}_1 <> 0$.

PRISE EN COMPTE DE LA TENSION DE SURFACE



- Bilan de quantité de mouvement. Forces :

$$= \int_{C(t)} \sigma \mathbf{N} \, \mathrm{d}l + \int_{A_1 \cup A_2} \mathbf{n}_k \,.\, \mathbb{T}_k \, \mathrm{d}S + \int_{V_1 \cup V_2} \rho_k \mathbf{F}_k \, \mathrm{d}V.$$

- Théorème de Gauss Aris (1962), Delhaye (1974) :

$$\int_{C(t)} \sigma \mathbf{N} \, \mathrm{d}l = \int_{A_i(t)} (\nabla_S \sigma - \mathbf{n} \sigma \nabla_S \,.\, \mathbf{n}) \, \mathrm{d}S$$

- ∇_S : gradient de surface, $\nabla_S \,.$: divergence de surface. Bilan de quantité de mouvement à l'interface :

$$\dot{m}_1 \mathbf{v}_1 + \dot{m}_2 \mathbf{v}_2 - \mathbf{n}_1 \,.\, \mathbb{T}_1 - \mathbf{n}_2 \,.\, \mathbb{T}_2 = -\nabla_S \sigma + \mathbf{n} \sigma \nabla_S \,.\, \mathbf{n}$$

- $\nabla_S \sigma$: effet Marangoni, $\mathbf{n} \sigma \nabla_S \,.\, \mathbf{n}$: surpression capillaire, loi de Laplace.

$$\mathbf{n} \sigma \nabla_S \,.\, \mathbf{n} = 2H \mathbf{n}$$

- H : courbure moyenne de la surface.

CAS PARTICULIER 2D PLAN

- Bilan de quantité de mouvement l'interface

$$\dot{m}_1 \mathbf{v}_1 + \dot{m}_2 \mathbf{v}_2 - \mathbf{n}_1 \,\mathbf{.}\, \mathbb{T}_1 - \mathbf{n}_2 \,\mathbf{.}\, \mathbb{T}_2 + \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}l}\tau - \frac{\sigma}{R}\mathbf{n} = 0$$

- Exemple fluide non visqueux

$$\mathbf{n}_1(p_1 - p_2) + \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}l}\tau - \frac{\sigma}{R}\mathbf{n} = 0$$

- Loi de Laplace, $\perp$: $(p_1 - p_2) = \dfrac{\sigma}{R}\mathbf{n} \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_1$
- Incohérence, // : $\mu_k = 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}l} = 0$
- Effet Marangoni, fluides visqueux,

$$-(\mathbf{n}_1 \,\mathbf{.}\, \mathbb{V}_1 + \mathbf{n}_2 \,\mathbf{.}\, \mathbb{V}_2) \,\mathbf{.}\, \tau + \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}l} = 0$$

- $\sigma(T)$, $\sigma(c)$.

BILANS AUX INTERFACES

- Bilan d'énergie totale :

$$\dot{m}_1 \left(u_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) + \dot{m}_2 \left(u_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) + \mathbf{q}_1 \centerdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{q}_2 \centerdot \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1 \centerdot \mathbb{T}_1 \centerdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{n}_2 \centerdot \mathbb{T}_2 \centerdot \mathbf{v}_2 = 0$$

- Bilan d'énergie totale (enthalpie),
  - Le changement de phase est l'effet dominant
  - La variation d'énergie cinétique peut être négligée
  - L'effet du saut de pression et des contraintes visqueuses peut être négligé,

$$\dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_2 h_2 + \mathbf{q}_1 \centerdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{q}_2 \centerdot \mathbf{n}_2 = 0$$

- Equations secondaires (Delhaye, 1974).
- Condition d'équilibre thermodynamique de l'interface :

$$\mathbf{v}_1^t = \mathbf{v}_2^t, \quad T_1 = T_2, \quad g_1 - g_2 = \frac{1}{2} \dot{m}_1^2 \left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) - \left(\frac{\mathbf{n}_2 \centerdot \mathbb{V}_2 \centerdot \mathbf{n}_2}{\rho_2} - \frac{\mathbf{n}_1 \centerdot \mathbb{V}_1 \centerdot \mathbf{n}_1}{\rho_1} \right)$$

PROBLÈMES RÉSOLUS PAR LES ÉQUATIONS LOCALES

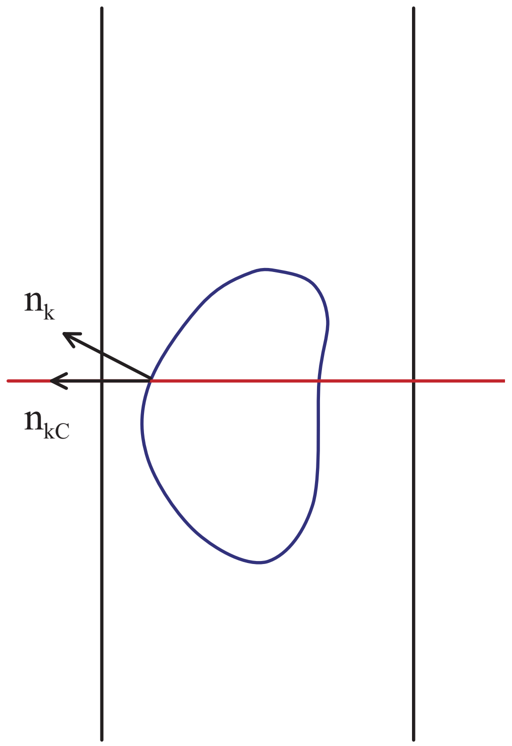
- Bilan globaux, principes fondamentaux
  - Equations locales phasiques
  - Relations de saut aux interfaces
- Problèmes simple
  - Ecoulement d'un film liquide
  - Croissance d'une bulle (ébullition nucléée, cavitation etc.)
- Problèmes diphasiques en général,
  - Interfaces multiples, déséquilibres
  - Fluctuations, intermittence, évolution des grandeurs moyennes.

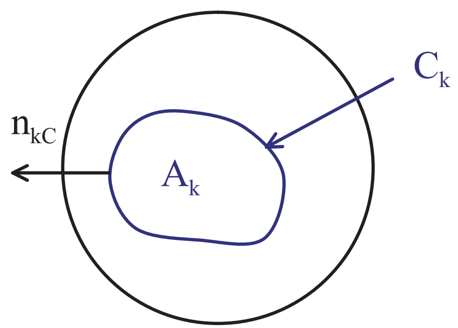
$\Rightarrow$ Equations locales moyennées en espace (sur la section) thermohydraulique 1D

$\Rightarrow$ Equations locales moyennées en temps (codes 3D)

$\Rightarrow$ Equations locales moyennées en espace (sur la section) et en temps, codes système

EQUATIONS MOYENNÉES SUR LA SECTION





- Rappel moyenne sur la section

$$< f_k >_2 = \frac{1}{A_k} \int_{A_k} f_k \, \mathrm{d}A$$

- Bilan pour les valeurs moyennes ? Bilan local intégré sur A_k. Exemple, bilan de masse,

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) = 0$$

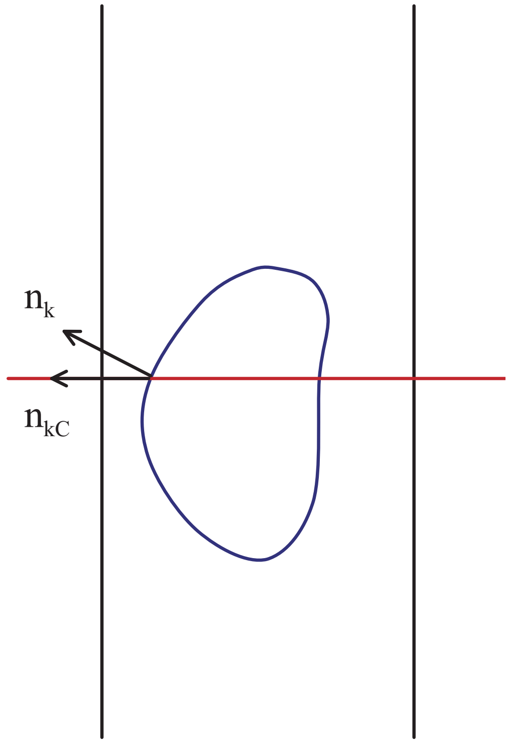
- Intégration sur la section,

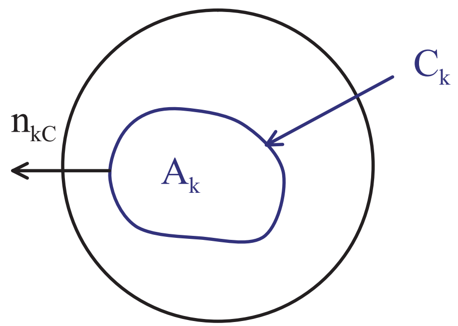
$$\int_{A_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} \, \mathrm{d}A + \int_{A_k} \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) \, \mathrm{d}A = 0$$

- Théorèmes de commutation, Leibniz et Gauss (formes limites)

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{A_k} \rho_k \, \mathrm{d}A}_{A_k < \rho_k >_2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\int_{A_k} \rho_k w_k \, \mathrm{d}A}_{A_k < \rho_k w_k >_2} + \cdots = 0$$

OUTILS MATHÉMATIQUES





- Forme limite de la règle de Leibniz,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_k} f_k \mathrm{d}A = \int_{A_k} \frac{\partial f_k}{\partial t}\mathrm{d}A + \int_{C_k} f_k \mathbf{v}_i \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_k \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_{kC}}$$

- Forme limite du théorème de Gauss,

$$\int_{A_k} \nabla \,\mathbf{.}\, \mathbf{B}\mathrm{d}A = \frac{\partial}{\partial z}\int_{A_k} \mathbf{B} \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_z + \int_{C_k} \mathbf{n}_k \,\mathbf{.}\, \mathbf{B} \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_{kC}}$$

- Identité utile (1), $\mathbf{B} = \mathbf{n}_z$

$$\frac{\partial A_k}{\partial z} = -\int_{C_k} \mathbf{n}_k \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_z \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_{kC}}$$

- Identité utile (2), $\mathbb{B} = p\mathbb{I}$

$$\int_{A_k} \nabla p \,\mathrm{d}A = \frac{\partial}{\partial z}\int_{A_k} p\mathbf{n}_z \mathrm{d}A + \int_{C_k} p\mathbf{n}_k \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_{kC}}$$

BILAN SUR LA SECTION

- Intégration sur la section,

$$\int_{A_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} \, \mathrm{d}A + \int_{A_k} \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) \, \mathrm{d}A = 0$$

- Théorème de Gauss et règle de Leibniz,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k w_k >_2 = - \int_{C_k} \dot{m}_k \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

- Production de la phase k par unité de longueur de conduite (homogénéisation)

$$\Gamma_k = - \int_{C_k} \dot{m}_k \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

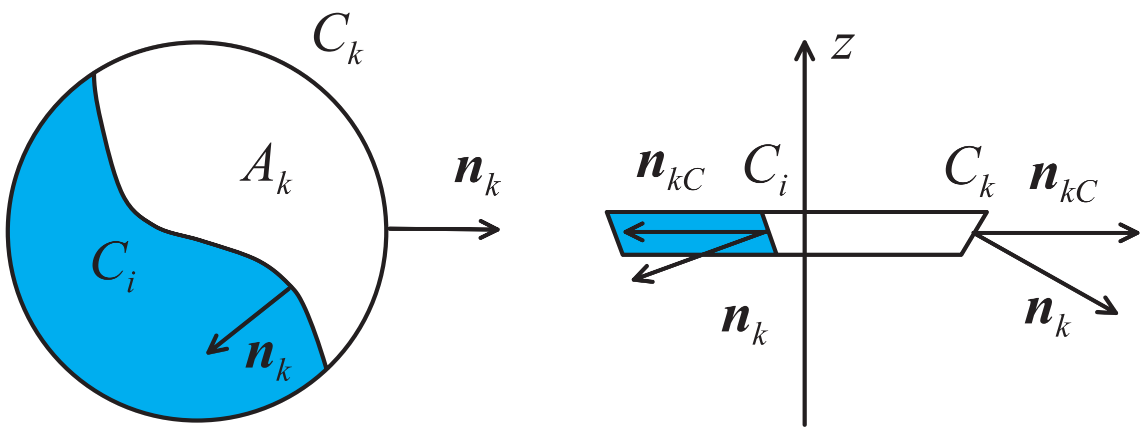
- Pas de changement de phase : $\dot{m}_k = 0 \Rightarrow \Gamma_k = 0$
- De plus, bilan interface, $\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0 \Rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv 0$
- le bilan de masse 1D n'est **pas fermé**

FORME GÉNÉRALE

- Forme générale des bilans,

$$\frac{\partial}{\partial t}A_k < \rho_k \psi_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z}A_k < \mathbf{n}_z \cdot \rho_k \mathbf{v}_k \psi_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z}A_k < \mathbf{n}_z \cdot \mathbf{j}_{\psi k} >_2 - A_k < \phi_k >_2$$
$$= -\int_{C_i} \left(\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{j}_{\psi k}\right) \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} - \int_{C_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{j}_{\psi k} \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

- Contour : $C_i \cup C_k$, C_k périmètre de la paroi mouillée par la phase k, C_i interface.



BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

- Note sur le bilan de quantité de mouvement, équation vectorielle,

$$\frac{\partial}{\partial t}A_k < \rho_k \mathbf{v}_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z}A_k < \rho_k w_k \mathbf{v}_k >_2 - \frac{\partial}{\partial z}A_k < \mathbf{n}_z \,.\, \mathbb{T}_k >_2 - A_k < \rho_k \mathbf{g}_k >_2$$

$$= - \int_{C_i} \left(\dot{m}_k \mathbf{v}_k - \mathbf{n}_k \,.\, \mathbb{T}_k\right) \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k} \mathbf{n}_k \,.\, \mathbb{T}_k \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}}$$

- Projection sur $\mathbf{n}_z$, $w_k = \mathbf{v}_k \,.\, \mathbf{n}_z$, décomposition tenseur des contraintes,

$$\frac{\partial}{\partial t}A_k < \rho_k w_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z}A_k < \rho_k w_k^2 >_2 + \frac{\partial}{\partial z}A_k < p_k >_2 - \frac{\partial}{\partial z}A_k < \mathbf{n}_z \,.\, \mathbb{V}_k \,.\, \mathbf{n}_z >_2$$

$$-A_k < \rho_k g_z >_2 = - \int_{C_i} \left(\dot{m}_k w_k - \mathbf{n}_k \,.\, \mathbb{T}_k \,.\, \mathbf{n}_z\right) \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k} \mathbf{n}_k \,.\, \mathbb{T}_k \,.\, \mathbf{n}_z \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}}$$

- Identité (1), $< p_k >_2 = p_C$

$$- \int_{C_k \cup C_i} p_k \mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_z \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}} = -p_C \int_{C_k \cup C_i} \mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_z \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}} = < p_k >_2 \frac{\partial A_k}{\partial z}$$

- Autres choix possibles, excès de pression, p_i, $p_C = < p_k >_2 + p_i \cdots$

BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

- Bilan de quantité de mouvement, pressions égales,

$$\frac{\partial}{\partial t}A_k < \rho_k w_k >_2 + \frac{\partial}{\partial z}A_k < \rho_k w_k^2 >_2 + A_k \frac{\partial}{\partial z} < p_k >_2 - \frac{\partial}{\partial z}A_k < \mathbf{n}_z \,.\, \mathbb{V}_k \,.\, \mathbf{n}_z >_2$$

$$-A_k < \rho_k g_z >_2 = -\int_{C_i} (\dot{m}_k w_k - \mathbf{n}_k \,.\, \mathbb{V}_k \,.\, \mathbf{n}_z) \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}} + \int_{C_k} \mathbf{n}_k . \mathbb{V}_k . \mathbf{n}_z \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,.\, \mathbf{n}_{kC}}$$

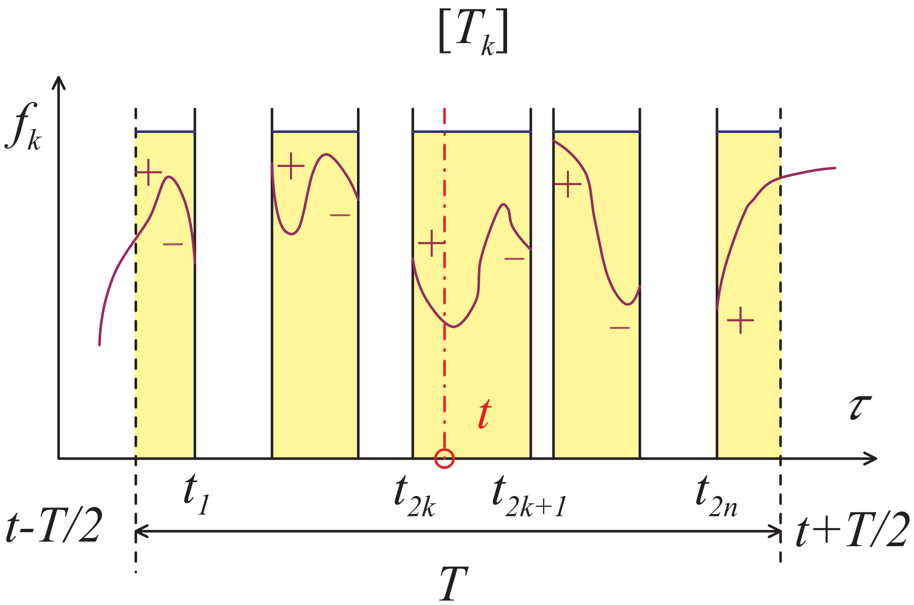
- Transferts transverses dominants, écoulements quasi établis,

$$\frac{\partial}{\partial z}A_k < \mathbf{n}_z \,.\, \mathbb{V}_k \,.\, \mathbf{n}_z >_2 \propto \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_t \frac{\partial w}{\partial z}\right) \to 0$$

- Donner un exemple où ce terme ne peut être négligé.

- **Fermetures nécessaires**: interactions à l'interface et à la paroi (frottement pariétal).

EQUATIONS MOYENNÉES EN TEMPS



- Rappel moyenne temporelle conditionnée par X_k,

$$\overline{f}^X = \frac{1}{T_k}\int_{[T_k]} f_k \mathrm{d}t = \frac{\int_T X_k f_k \mathrm{d}t}{\int_T X_k \mathrm{d}t} = \frac{\overline{X_k f_k}}{\overline{X_k}}$$

- Moyenne temporelle,

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_T f \mathrm{d}t$$

- Equation aux valeurs moyennes : ex. bilan de masse, intégré sur $[T_k]$,

$$\int_{[T_k]} \frac{\partial \rho_k}{\partial t}\mathrm{d}t + \int_{[T_k]} \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k)\,\mathrm{d}t = 0$$

- Théorèmes de commutation, formes limites, Leibniz et Gauss

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_{[T_k]} \rho_k \mathrm{d}t}_{T_k \overline{\rho_k}^X} + \cdots + \nabla \cdot \underbrace{\int_{[T_k]} \rho_k \mathbf{v}_k \mathrm{d}t}_{T_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k}^X} + \cdots = 0$$

OUTILS MATHÉMATIQUES

- Forme limite de la règle de Leibniz (dérivation sous le signe somme),

$$\int_{[T_k]} \frac{\partial f_k}{\partial t} \mathrm{d}t = \frac{\partial}{\partial t} \int_{[T_k]} f_k \mathrm{d}t - \sum_{\mathrm{disc.} \in [T]} f_k \underbrace{\frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}}_{\pm 1}$$

- Forme limite du théorème de Gauss

$$\int_{[T_k]} \nabla \cdot \mathbf{B}_k \mathrm{d}t = \nabla \cdot \int_{[T_k]} \mathbf{B}_k \mathrm{d}t + \sum_{\mathrm{disc.} \in [T]} \frac{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{B}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}$$

- Bilan de masse moyenné, source interfaciale homogénéisée (source volumique),

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k}^X}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k}^X \right) = -\frac{1}{T} \sum_{\mathrm{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}$$

- Bilan généralisé moyenné, point de départ de la décomposition de Reynolds

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k \psi_k}^X}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{v}_k \psi_k}^X \right) + \nabla \cdot \left(\alpha_k \overline{\mathbf{j}_{\psi k}}^X \right) - \alpha_k \overline{\phi_k}^X = -\frac{1}{T} \sum_{\mathrm{disc.} \in [T]} \frac{\dot{m}_k \psi_k + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{j}_{\psi k}}{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k|}$$

MOYENNES COMPOSITES

- Exemple du bilan de masse,espace, puis temps

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{A_k < \rho_k >_2} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{A_k < \rho_k w_k >_2} = -\overline{\int_{C_k} \dot{m}_k \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n}_k \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_{kC}}}$$

- Temps puis espace

$$\frac{\partial}{\partial t}A \nless \alpha_k \overline{\rho_k}^X \ngtr_2 + \frac{\partial}{\partial z}A \nless \alpha_k \overline{\rho_k w_k}^X \ngtr_2 = -A \nless \frac{1}{T}\sum_{\text{disc.}\in[T]} \frac{\dot{m}_k}{|\mathbf{v}_i \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_k|} \ngtr_2$$

- Membre de gauche identiques, commutation des opérateurs de moyenne
- Commutativité des termes d'interaction,
- Aire interfaciale volumique,

$$\gamma = \frac{1}{T}\sum_{\text{disc.}\in[T]} \frac{1}{|\mathbf{v}_i \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_k|}$$

- Fermeture des termes d'interaction : flux moyen-aire interfaciale,

$$\frac{1}{T}\sum_{\text{disc.}\in[T]} \frac{\dot{m}_k}{|\mathbf{v}_i \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_k|} = \frac{\dot{m}_{ki}}{T}\sum_{\text{disc.}\in[T]} \frac{1}{|\mathbf{v}_i \,\mathbf{.}\, \mathbf{n}_k|} = \gamma \dot{m}_{ki}$$

POUR EN SAVOIR PLUS

- Les équations de bilan en écoulement monophasique (Bird *et al.* , 2007). Un livre de référence, pas un formulaire....
- Les équations de bilan des écoulements diphasiques (Delhaye, 2008).

REFERENCES

Aris, R. 1962. *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Prentice-Hall.

Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. 2007. *Transport phenomena*. Revised second edn. John Wiley & Sons.

Delhaye, J. M. 1974. Jump conditions and entropy sources in two-phase systems, local instant formulation. *Int. J. Multiphase Flow*, **1**, 359–409.

Delhaye, J.-M. 2008. *Thermohydraulique des réacteurs nucléaires*. Collection génie atomique. EDP Sciences.