

# UNE INTRODUCTION AUX ECOULEMENTS DIPHASIQUES

Les modèles 1D et  
les pertes de pression

HERVE LEMONNIER

DTN/SE2T, CEA/Grenoble, 38054 Grenoble Cedex 9

Tél. 04 38 78 45 40, *herve.lemonnier@cea.fr*

*herve.lemonnier.sci.free.fr/TPF.htm*

Phelma, 2011-2012

# MODÈLES MOYENNÉS SUR LA SECTION

- Modèle homogène,
- Modèle à flux de dérive,
- Modèle à deux fluides,
  - Fermetures
  - Conséquences des choix de modélisation
    1. Cohérence physique du modèle,
    2. Nature mathématique du système d'EDP,
- Rappel des équations moyennées en espace et temps (simplifications courantes). Equations du mélange.

# BILAN DE MASSE (MOYENNES COMPOSITES)

- Bilan de masse moyenné sur la section et en temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{A R_{k2} \langle \rho_k \rangle_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A R_{k2} \langle \rho_k w_k \rangle_2} = \Gamma_k, \quad \Gamma_k \triangleq - \overline{\int_{C_i} \dot{m}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}}$$

- Définition des grandeurs moyennes :

$$\overline{R_{k2} \langle \rho_k \rangle_2} \triangleq \overline{R_{k2} \rho_k} = \alpha_k \rho_k, \quad \overline{R_{k2} \langle \rho_k w_k \rangle_2} \triangleq \alpha_k \rho_k v_k$$

- Avec ces notations,

$$\frac{\partial}{\partial t} A \alpha_k \rho_k + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha_k \rho_k v_k = \Gamma_k$$

- NB. Hypothèse des profils plats :  $\neq \alpha$  et  $w_k$  uniformes.

# BILAN DE MASSE DU MÉLANGE

- Additionner les bilans de masse de chaque phase,

$$\frac{\partial}{\partial t} A(\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2) + \frac{\partial}{\partial z} A(\alpha_1 \rho_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2) = 0$$

- Définition de la masse du mélange,

$$\rho \triangleq \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$$

- Définition de la vitesse du mélange, conserve le débit masse,

$$\rho v \triangleq \alpha_1 \rho_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2$$

- Avec ces nouvelles notations, identique au principe !

$$\frac{\partial}{\partial t} A\rho + \frac{\partial}{\partial z} A\rho v = 0$$

# BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

- Bilan de quantité de mouvement simplifié (1 pression au lieu de 3), contraintes visqueuses axiales négligées,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{A \langle R_{k2} \rho_k w_k \rangle_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A \langle R_{k2} \rho_k w_k^2 \rangle_2} + \overline{A R_{k2} \frac{\partial}{\partial z} \langle p_k \rangle_2} - \overline{A R_{k2} \langle \rho_k g_z \rangle_2} \\ &= - \overline{\int_{C_i} (\dot{m}_k w_k - \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} + \overline{\int_{C_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} \end{aligned}$$

- Profils plats : corrélation spatiale des vitesses  $C$ , pression  $p_k$ ,

$$C \triangleq \frac{\overline{\langle R_{k2} \rho_k w_k^2 \rangle_2}}{\alpha_k \rho_k v_k^2} = 1, \quad \overline{R_{k2} \frac{\partial}{\partial z} \langle p_k \rangle_2} \triangleq \alpha_k \frac{\partial p_k}{\partial z}$$

- Termes d'interaction :

$$\begin{aligned} - \overline{\int_{C_i} (\dot{m}_k w_k) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} &= \Gamma_k v_{ki}, & \overline{\int_{C_k} \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} &= A \langle \gamma \rangle_2 = A \gamma \\ \overline{\int_{C_i} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} &= -A \gamma \tau_{ki}, & \overline{\int_{C_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} &= -P_k \tau_{wk} \end{aligned}$$

# QUANTITÉ DE MOUVEMENT DU MÉLANGE

- Forme simplifiée, phase  $k$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} A \alpha_k \rho_k v_k + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha_k \rho_k v_k^2 + A \alpha_k \frac{\partial p_k}{\partial z} = \Gamma_k v_{ki} - A \gamma \tau_{ki} - P_k \tau_{wk} + A \alpha_k \rho_k g_{kz}$$

- Bilan de quantité de mouvement du mélange, une pression,

$$\frac{\partial}{\partial t} A(\alpha_1 \rho_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2) + \frac{\partial}{\partial z} A(\alpha_1 \rho_1 v_1^2 + \alpha_2 \rho_2 v_2^2) + A \frac{\partial p}{\partial z} = -P \tau_w + A \rho g_z$$

- Autre forme du terme d'inertie,  $x \triangleq \frac{M_G}{M} = \frac{\alpha_G \rho_G v_G}{\alpha_L \rho_L v_L + \alpha_G \rho_G v_G}$

$$\alpha_G \rho_G v_G^2 + \alpha_L \rho_L v_L^2 = \frac{G^2}{\rho'}, \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{x^2}{\alpha \rho_G} + \frac{(1-x)^2}{(1-\alpha) \rho_L}, \quad G = \frac{M}{A}$$

- Donner deux exemples d'incohérence de l'hypothèse des profils plats.

# BILAN D'ÉNERGIE TOTALE

- Bilan d'énergie totale → en enthalpie,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} A_k \langle \rho_k \left( u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) \rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \rho_k w_k \left( u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) \rangle_2 \\ & + \frac{\partial}{\partial z} A_k \langle \mathbf{n}_z \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) \rangle_2 - A_k \langle \rho_k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{v}_k \rangle_2 \\ & = - \int_{C_i \cup C_k} \left( \dot{m}_k \left( u_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) + \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbb{T}_k \cdot \mathbf{v}_k) \right) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned}$$

- Termes en  $\frac{\partial}{\partial z}$ ,  $u_k \rightarrow h_k - p_k/\rho_k$ ,  $\mathbb{T}_k \rightarrow \mathbb{V}_k$ ,
- Termes  $\frac{\partial}{\partial t}$  term  $u_k \rightarrow h_k - p_k/\rho_k$ , ajoute  $-\frac{\partial}{\partial t} A_k \langle p_k \rangle_2$ , utiliser l'identité utile (2),

$$\frac{\partial}{\partial t} A_k \langle p_k \rangle_2 = A_k \langle \frac{\partial p_k}{\partial t} \rangle_2 + \int_{C_i \cup C_k} p_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}$$

- Regrouper les termes de pression à droite,

# BILAN D'ÉNERGIE TOTALE

- Bilan d'énergie totale moyenné sur la section (enthalpie):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_k < \rho_k \left( h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2 - A_k < \frac{\partial p_k}{\partial t} >_2 + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \rho_k w_k \left( h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2 \\ + \frac{\partial}{\partial z} A_k < \mathbf{n}_z \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{v}_k) >_2 - A_k < \rho_k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{v}_k >_2 \\ = - \int_{C_i \cup C_k} \left( \dot{m}_k \left( h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) + \mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbb{V}_k \cdot \mathbf{v}_k) \right) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}} \end{aligned}$$

- Moyenne en temps, négliger les effets diffusifs longitudinaux et visqueux à l'interface,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{A_k < \rho_k \left( h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2} - \overline{A_k < \frac{\partial p_k}{\partial t} >_2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_k < \rho_k w_k \left( h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) >_2} \\ - \overline{A_k < \rho_k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{v}_k >_2} = - \overline{\int_{C_i \cup C_k} \left( \dot{m}_k \left[ h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right] + \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{q}_k \right) \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} \end{aligned}$$

- Pour définir l'enthalpie moyenne, on ne peut conserver qu'un seul terme (flux, permanent).

# BILAN D'ÉNERGIE TOTALE MOYEN

- On choisit de conserver le flux,

$$\overline{A_k \rho_k w_k \left( h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right)} >_2 \triangleq A \alpha_k \rho_k v_k \left( h_k + \frac{1}{2} w_k^2 \right)$$

- Bilan d'énergie totale simplifié,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A \alpha_k \rho_k \left( h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) - A \alpha_k \frac{\partial p_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} A \alpha_k \rho_k v_k \left( h_k + \frac{1}{2} v_k^2 \right) \\ - A \alpha_k \rho_k g_k v_k = \Gamma_k h_{ki}^t + A \gamma q_{ki} + P_k q_{wk} \end{aligned}$$

# BILAN D'ÉNERGIE DU MÉLANGE

- Somme des deux bilans phasiques, une seule pression

$$\frac{\partial}{\partial t} A(\alpha_1 \rho_1 h_1^t + \alpha_2 \rho_2 h_2^t) + \frac{\partial}{\partial z} A(\alpha_1 \rho_1 v_1 h_1^t + \alpha_2 \rho_2 v_2 h_2^t) - A \frac{\partial p}{\partial t} - A(\alpha_1 \rho_1 g_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 g_2 v_2) = P q_w$$

- $k_k^t = h_k + \frac{1}{2} w_k^2$  : enthalpie totale.
- Autre forme du terme convectif, enthalpie du (de) mélange,  $h^t$ ,

$$\underbrace{A \alpha_V \rho_V v_V}_{M_V} h_V^t + \underbrace{A \alpha_L \rho_L v_L}_{M_L} h_L^t \triangleq M h^t = M(x h_V^t + (1-x) h_L^t)$$

- NB, l'enthalpie moyenne dans la section n'est pas égale à l'enthalpie de mélange.
- L'équation du mélange reste exacte en permanent seulement.

$$\frac{\partial}{\partial t} A \rho h^t - A \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} A \rho w h^t = P q_w + M g_z$$

# MODÈLE HOMOGENÈNE À L'ÉQUILIBRE (HEM)

- Evolution imposée, 3 bilans pour le mélange + 3 hypothèses
  - Egalité des vitesses moyennes :  $w_V = w_L \equiv \alpha = \beta$
  - Phase liquide et vapeur en moyenne à l'équilibre :  $T_L = T_V = T_{\text{sat}}(p)$
- Fermeture thermodynamique, EOS,

$$\rho_L = \rho_{L\text{sat}}(p), \quad \rho_V = \rho_{V\text{sat}}(p), \quad h_L = h_{L\text{sat}}(p), \quad h_V = h_{V\text{sat}}(p)$$

- Taux de vide du modèle homogène,

$$\alpha = \beta = \frac{Q_G}{Q_G + Q_L} = \frac{x\rho_L}{x\rho_L + (1-x)\rho_V} = \alpha(x, p)$$

- Bilans,

$$\frac{\partial}{\partial t} A\rho + \frac{\partial}{\partial z} A\rho w = 0, \quad \rho = \alpha\rho_V + (1-\alpha)\rho_L$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A\rho w + \frac{\partial}{\partial z} A\rho w^2 + A \frac{\partial p}{\partial z} = -P\tau_W + A\rho g_z$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A\rho \left( h + \frac{1}{2} w^2 \right) - A \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} A\rho w \left( h + \frac{1}{2} w^2 \right) = Pq_W + A\rho g_z w$$

# MODÈLE HOMOGENÈ À L'ÉQUILIBRE

- Autre forme des bilans, combinaison avec le bilan de masse

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} A\rho + \frac{\partial}{\partial z} A\rho w &= 0 \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{P}{A} \tau_W + \rho g_z \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( h + \frac{1}{2} w^2 \right) - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho w \frac{\partial}{\partial z} \left( h + \frac{1}{2} w^2 \right) &= \frac{P}{A} q_W + \rho g_z w\end{aligned}$$

- Bilan d'énergie mécanique du mélange,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} w^2 + \rho w \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{2} w^2 + w \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{P}{A} w \tau_W + \rho g_z w$$

- Bilan d'entropie du mélange,  $T ds = dh - \frac{dp}{\rho}$

$$\rho T \frac{\partial s}{\partial t} + \rho w T \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{P}{A} (q_W + w \tau_W)$$

# MODÈLE HOMOGENÈNE À L'ÉQUILIBRE

- Bilans de masse, d'énergie et d'entropie,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\rho w}{A} \frac{dA}{dz}$$
$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( h + \frac{1}{2} w^2 \right) - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho w \frac{\partial}{\partial z} \left( h + \frac{1}{2} w^2 \right) = \frac{P}{A} q_W + \rho g_z w$$
$$\rho T \frac{\partial s}{\partial t} + \rho w T \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{P}{A} (q_W + w \tau_W)$$

- Cas particulier important : écoulement stationnaire, forces de volume négligeables, adiabatique et sans frottement,

$$M = A \rho w = \text{cste}$$

$$h + \frac{1}{2} w^2 = \text{cste}$$

$$s = x s_V + (1 - x) s_L = \text{cste}$$

- Applications : flashing, tube long, chauffage en paroi, débit critique.

# FERMETURES DU MODÈLE HOMOGENÈ

- Frottement pariétal et flux de chaleur,  $q_W$ ,  $\tau_W$
- Variables indépendantes :  $x$ ,  $w$ , et  $p$
- Thermodynamique,  $v = \frac{1}{\rho} = xv_V + (1 - x)v_L$

$$v_L = v_{L\text{sat}}(p), \quad v_V = v_{V\text{sat}}(p), \quad h_L = h_{L\text{sat}}(p), \quad h_V = h_{V\text{sat}}(p)$$
$$v_{V,p}, \quad v_{L,p}, \quad h_{V,p}, \quad h_{L,p}$$

- Cohérence thermodynamique.

# MODÈLE À FLUX DE DÉRIVE

- Modèle à flux de dérive (*drift-flux*), déséquilibre mécanique.
- Bilans de masse, bilan de quantité de mouvement du mélange, et d'énergie totale,  $w_V \neq w_L$ ,  $w$  vitesse du mélange.
- Fermeture, équation d'évolution (FLICA)

$$w_V - w_L = f(x, p, \alpha, \text{régime d'écoulement}, \dots)$$

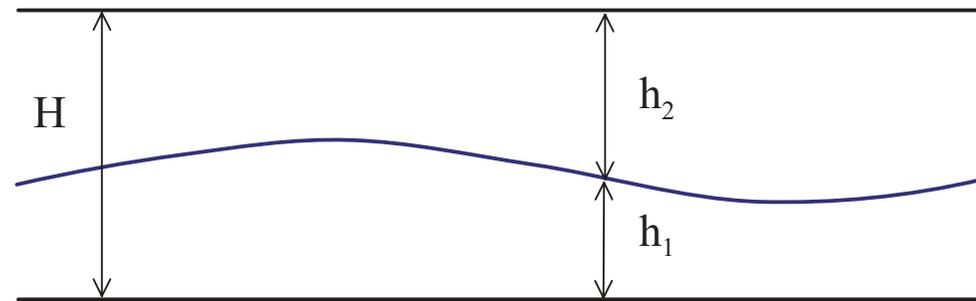
$$J_{GL} = f(\alpha, \text{régime d'écoulement}, \dots)$$

- Transitoires lents : non contrôlées par l'inertie.
- Ce modèle est aussi utilisé en 3D, voir par exemple [Delhaye \(2008a\)](#), [Ishii & Hibiki \(2006\)](#). Une seule équation d'impulsion.

# MODÈLE À DEUX FLUIDES

- Déséquilibre mécaniques et thermiques,
  - 3 équations de bilan par phase (6).
  - 3 équations de bilan pour le mélange et 3 équations pour la phase dispersée.
- Fermetures.
  - Loi topologique,  $\langle pq \rangle$ ,  $\langle p \rangle \langle q \rangle$ , pressions
  - Termes d'interaction aux interfaces
  - Termes d'interaction de chaque phase avec la paroi.
- Conséquences des fermetures,
  - Propagation,
  - Ecoulement critique,
  - Nature du système (hyperbolicité).

# EXEMPLE DE L'ÉCOULEMENT STRATIFIÉ



- Hypothèses : isotherme, incompressible, horizontal,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\dot{m} = 0$ , 2D.
- Bilans de masse,

$$\frac{\partial}{\partial t} h_1 \rho_1 + \frac{\partial}{\partial z} h_1 \rho_1 \langle u_1 \rangle = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h_2 \rho_2 + \frac{\partial}{\partial z} h_2 \rho_2 \langle u_2 \rangle = 0$$

- Bilan de quantité de mouvement, à l'interface,

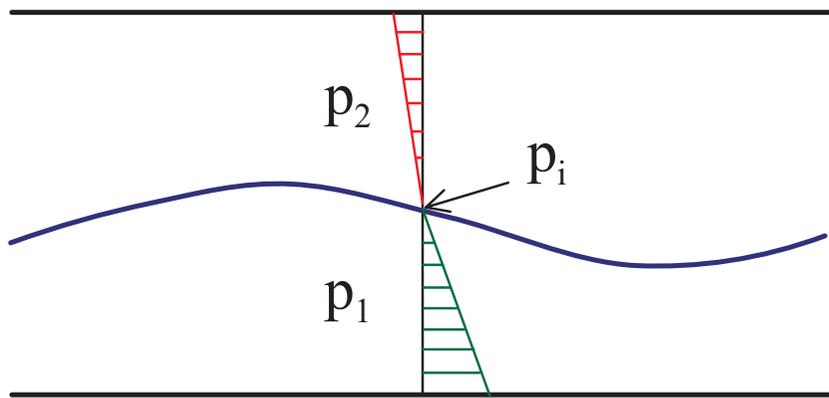
$$\frac{\partial}{\partial t} h_1 \rho_1 \langle u_1 \rangle + \frac{\partial}{\partial z} h_1 \rho_1 \langle u_1^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial z} h_1 \langle p_1 \rangle = p_{i1} \frac{\partial h_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h_2 \rho_2 \langle u_2 \rangle + \frac{\partial}{\partial z} h_2 \rho_2 \langle u_2^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial z} h_2 \langle p_2 \rangle = p_{i2} \frac{\partial h_2}{\partial z}$$

$$p_{i1} = p_{i2} \triangleq p_i$$

# FERMETURES

- 4 équations, 5 inconnues  $h$ ,  $\langle u_1 \rangle$ ,  $\langle u_2 \rangle$ ,  $\langle p_1 \rangle$ ,  $\langle p_2 \rangle$ ,
- 3 inconnues supplémentaires :  $\langle u_1^2 \rangle$ ,  $\langle u_2^2 \rangle$ ,  $p_i$ .



- Loi topologique

$$\langle p_1 \rangle = p_i + \frac{1}{2} \rho_1 g h_1$$

$$\langle p_2 \rangle = p_i - \frac{1}{2} \rho_2 g h_2$$

- Ne se déduit pas du bilan qdm  $\perp$ .

- Corrélations spatiales,  $C = 1$ , autres choix

$$\frac{\langle u_k^2 \rangle}{\langle u_k \rangle^2} = 1, \quad \frac{d}{dt} \langle u_k^2 \rangle = \frac{1}{T} [\langle u_k^2 \rangle - \langle u_k \rangle^2]$$

- Système fermé.

# STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT STRATIFIÉ

- Système à résoudre :  $\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} = 0$ ,  $\mathbf{X} = (h, u_1, u_2, p_1)$  :

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 h_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} \rho_1 u_1 & \rho_1 h_1 & 0 & 0 \\ -\rho_2 u_2 & 0 & \rho_2 h_2 & 0 \\ \frac{1}{2} \rho_1 g h_1 & \rho_1 u_1 h_1 & h_1 & \\ (\rho_1 - \frac{1}{2} \rho_2) g h_2 & 0 & \rho_2 u_2 h_2 & h_2 \end{bmatrix}$$

- Méthode de perturbation, [Van Dyke \(1975\)](#) :  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$
- Linéarisation,

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{X}_0 = \text{cste}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_0) \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial t} + \mathbf{B}(\mathbf{X}_0) \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial z} = 0$$

- $\mathbf{X}_0$  : solution de base,  $\mathbf{X}_1$  : perturbation (ordre 1)

# STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT STRATIFIÉ

- Ondes progressives :  $\mathbf{X}_1 = \tilde{\mathbf{X}}_1 \exp i(\omega t - kz)$ ,  $c = \omega/k$ ,
- Stabilité temporelle :  $X_1(a, t) = f(t)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , évolution dans le domaine ?
- Stabilité spatiale :  $X_1(z, 0) = g(z)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , amplification ?
- Second membre non nul, hypothèse des grandes longueurs d'onde.

$$(c\mathbf{A}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{B}(\mathbf{X}_0))\tilde{\mathbf{X}}_1 = 0$$

- Solution à une constante près :  $\tilde{\mathbf{X}}_1 \in \ker(c\mathbf{A}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{B}(\mathbf{X}_0))$
- Relation de dispersion :

$$-\rho_1\rho_2h_1h_2 (\rho_1h_2(u_1 - c)^2 + \rho_2h_1(u_2 - c)^2 - (\rho_1 - \rho_2)gh_1h_2) = 0$$

- Stabilité : 2 racines réelles ssi,

$$(u_1 - u_2)^2 \leq g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\rho_1h_2 + \rho_2h_1}{\rho_1\rho_2}$$

# STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT STRATIFIÉ

- Stabilité conditionnelle :  $\Delta u \leq \Delta u_C$

$$(u_1 - u_2)^2 \leq g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}{\rho_1 \rho_2}$$

- Lourd dessus, léger dessous,  $\rho_2 > \rho_1$ , toujours instable (c'est heureux)
- Profils de pression plats : toujours instable, ( $g = 0$ )
- Nature mathématique du système : conditionnellement hyperbolique.
- $g = 0$  : problème à conditions initiales mal posé au sens d'Hadamard. Impossibilité d'établissement à partir d'un transitoire.
- Pourquoi obtient-on une solution numérique pour l'écoulement établi ?
- Sans fermetures différentielles, le modèle à deux fluides et à une pression est mal posé.

# MODÉLISATION DES PERTES DE PRESSION

- Modélisation simplifiée
  - Bilan de masse du mélange
  - Bilan de quantité de mouvement du mélange
  - Ec. adiabatique :  $x = x_0$ , bilan d'énergie du mélange, eq. thermo.
  - Equation d'évolution ( $w_V \neq w_L$ )

- Fermetures :

$$\sum_{L,G} \overline{\int_{C_k} \mathbf{n}_k \cdot \nabla_k \cdot \mathbf{n}_z \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} = -P\tau_W$$
$$= - \sum_{L,G} \overline{\int_{C_k} \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{q}_k \frac{dl}{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC}}} = Pq_W$$

- $A = \text{cste}$ ,  $\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{kC} = 1$

# MODÉLISATION DES PERTES DE PRESSION

- Ecoulement permanent, section constante

$$\frac{d}{dz}\rho w = 0, \quad G = \text{cste}$$
$$\frac{d}{dz}\rho w^2 + \frac{dp}{dz} = -\frac{P}{A}\tau_W + \rho g_z, \quad \frac{P}{A} \triangleq \frac{4}{D_h}$$

- Le frottement pariétal n'apparaît que dans le bilan de qdm.

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{d}{dz}\rho w^2 - \frac{P}{A}\tau_W + \rho g_z \triangleq \left(\frac{dp}{dz}\right)_A + \left(\frac{dp}{dz}\right)_F + \left(\frac{dp}{dz}\right)_G$$

- Détermination expérimentale de  $\frac{dp}{dz}$  et éventuellement  $\alpha = \overline{R_{G2}}$
- Modèle d'évolution utilisé pour obtenir  $\left(\frac{dp}{dz}\right)_F$  :

Utilisation dans des **conditions identiques**.

# FROTTEMENT PARIÉTAL : MODÈLE HOMOGENÈ

- Le frottement n'est pas le terme dominant,

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_F = -\frac{P}{A}\tau_W = -\frac{4}{D_h}\tau_W$$

- Coefficient de frottement :  $f = 4C_f$  (attention...)

$$C_F = \frac{\tau_W}{\frac{1}{2}\rho w^2}, \quad f = \frac{D \left(\frac{dp}{dz}\right)_F}{\frac{1}{2}\rho w^2}$$

1. Ecoulement annulaire dispersé  $x \approx 1$ ,  $C_F = 0,005$ ,  
auto-vaporisation (*flashing*)  $x \approx 0$ ,  $C_F = 0,003$ .
2.  $x \ll 1$ ,  $C_F = C_{FL}$ ,  $M = M_L + M_V$ ,  
 $x \approx 1$ ,  $C_F = C_{FG}$ ,  $M = M_L + M_V$
3. Ecoulement monophasique :

$$\text{Poiseuille : } \frac{16}{\text{Re}}, \quad \text{Blasius : } \begin{cases} 0,079 \text{ Re}^{-0,25}, & \text{Re} < 20\,000 \\ 0,046 \text{ Re}^{-0,20}, & \text{Re} > 20\,000 \end{cases} \quad \text{Re} \triangleq \frac{GD}{\mu}$$

# FROTTEMENT PARIÉTAL

- Perspective historique : viscosité équivalente,
  - Dukler (1964) :  $\mu = \beta\mu_g + (1 - \beta)\mu_L$ ,  $C_F = 0,0014 + 0,125\text{Re}^{-0,32}$
  - Ishii-Zuber (1978), suspensions (liquide-gaz/liquide,  $\alpha_{DM} = 0,62$ )

$$\frac{\mu}{\mu_C} = \left(1 - \frac{\alpha_D}{\alpha_{DM}}\right)^{-2,5\alpha_{DM} \frac{\mu_D + 0,4\mu_C}{\mu_D + \mu_C}}$$

- Variation de pression par accélération, modèle d'évolution ( $\alpha \neq \beta$ ),

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_A = -G^2 \frac{d}{dz} \left[ \frac{x^2}{\alpha\rho_V} + \frac{(1-x)^2}{(1-\alpha)\rho_L} \right]$$

- Evolution du titre, bilan d'énergie (basse vitesse), équilibre thermodynamique,

$$G \frac{d}{dz} (xh_V + (1-x)h_L) = \frac{4}{D_c} q_w$$

## 2 CONSTITUANTS : LOCKHART & MARTINELLI

- Expérience : eau-air, basse pression,  $\Delta p_F$  et  $R_{G3}$  mesurés (QCV). 3 expériences, même dispositif (tube horizontal).

Situation	diphasique	gaz seul	liq. seul
Débit	$M = M_G + M_L$	$M_G$	$M_L$
$\left(\frac{dp}{dz}\right)_F$	$\left(\frac{dp}{dz}\right)$	$\left(\frac{dp}{dz}\right)_G$	$\left(\frac{dp}{dz}\right)_L$

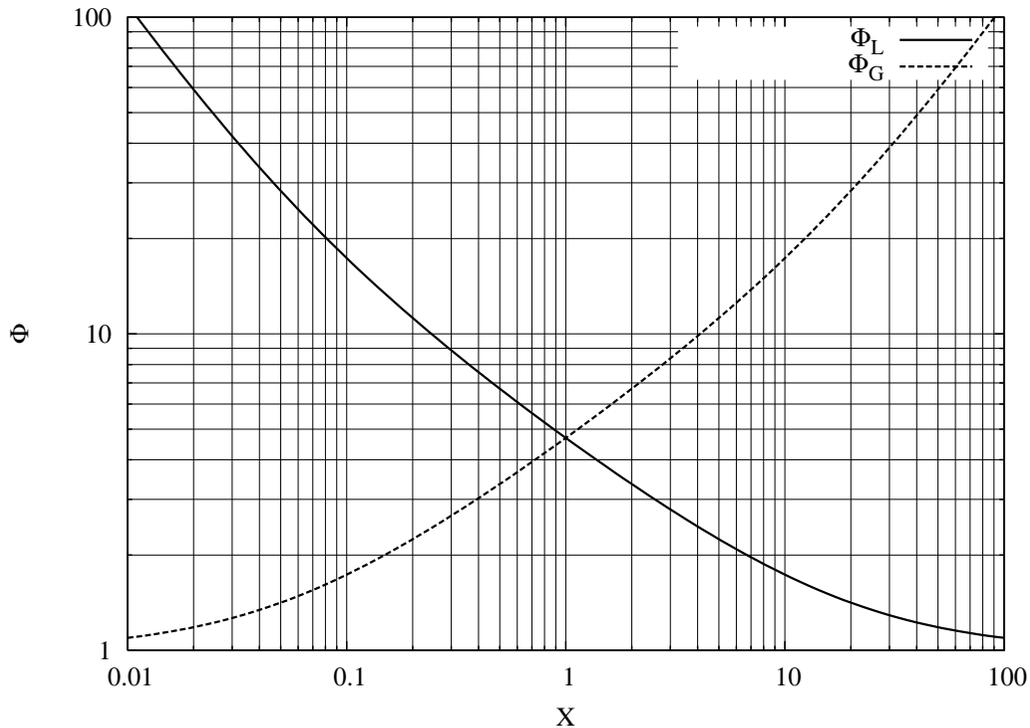
- Définitions de la perte de pression par frottement sans dimension (*two-phase pressure drop multiplier*)

$$\Phi_L^2 = \frac{\left(\frac{dp}{dz}\right)}{\left(\frac{dp}{dz}\right)_L}, \quad \Phi_G^2 = \frac{\left(\frac{dp}{dz}\right)}{\left(\frac{dp}{dz}\right)_G}, \quad X^2 = \frac{\left(\frac{dp}{dz}\right)_L}{\left(\frac{dp}{dz}\right)_G}$$

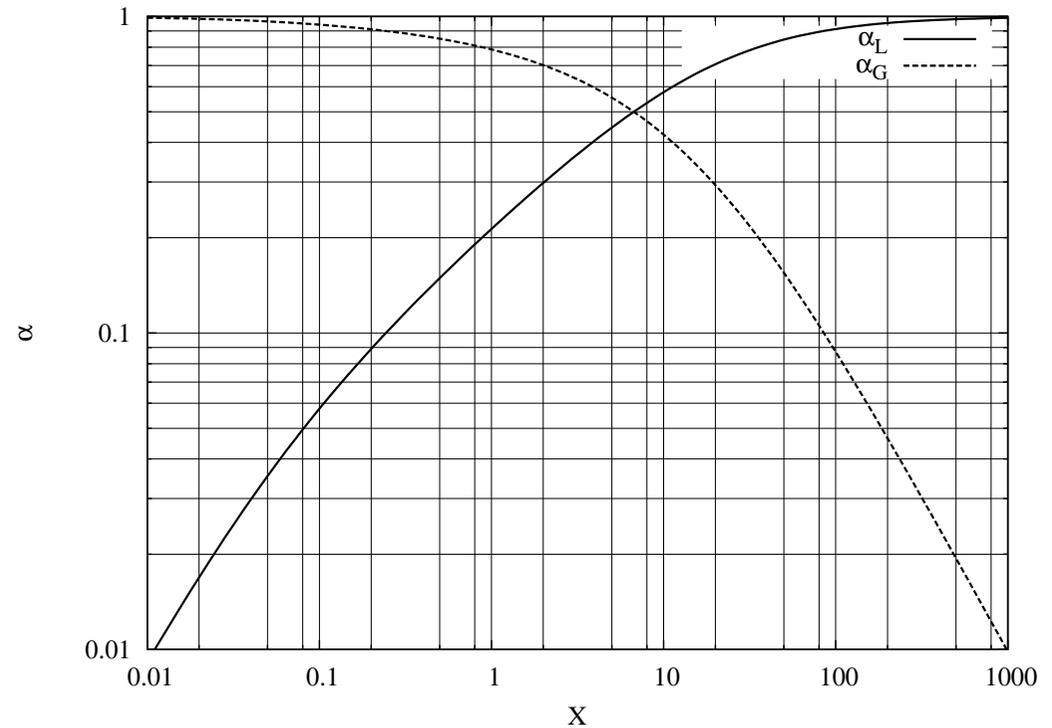
- Correlation de Blasius ( $C_f = 0,046 \text{ Re}^{-0,2}$ ),  $X$ , paramètre de L. & M.

$$X_{tt} = \left(\frac{\mu_L}{\mu_G}\right)^{0,1} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{0,9} \left(\frac{\rho_G}{\rho_L}\right)^{0,5}$$

# CORRÉLATION DE LOCKHART & MARTINELLI



$$\Phi_L = \sqrt{1 + \frac{20}{X} + \frac{1}{X^2}}$$



$$\alpha_L = \frac{X}{\sqrt{1 + 20X + X^2}}$$

# EAU-VAPEUR : MARTINELLI & NELSON

- Expérience : eau-vapeur, 34.5 ÷ 207 bar,  $\Delta p_G \approx 0$ .  
2 expériences, même dispositif (hélice GV).  $\Delta p = \Delta p_F + \Delta p_A$ .

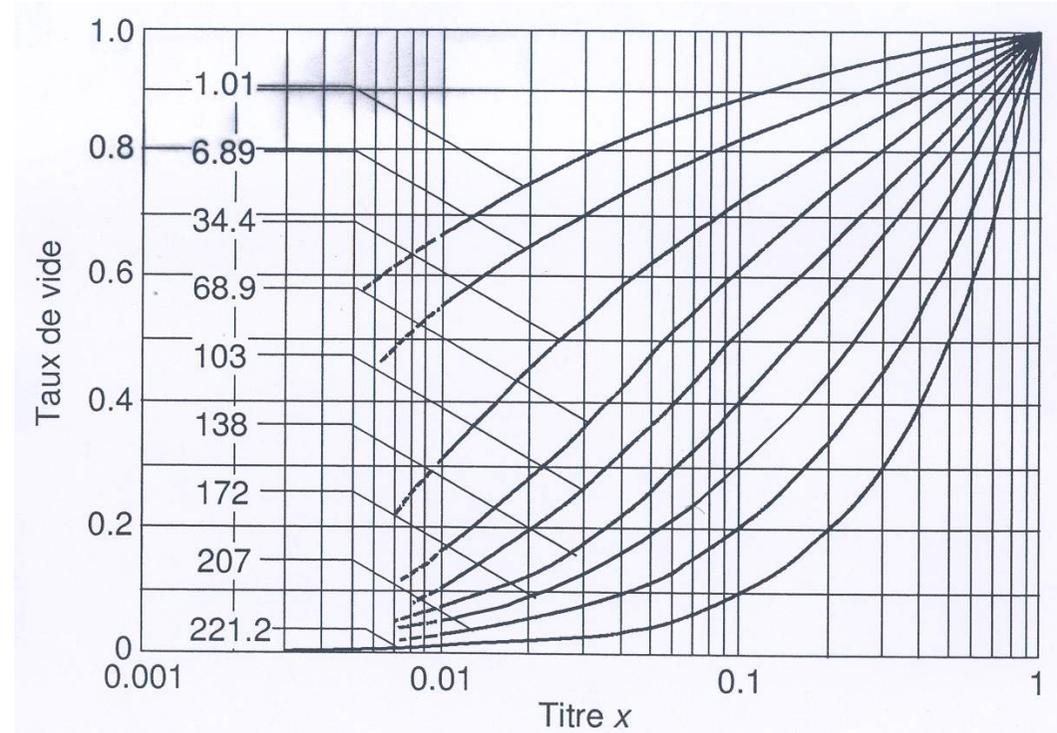
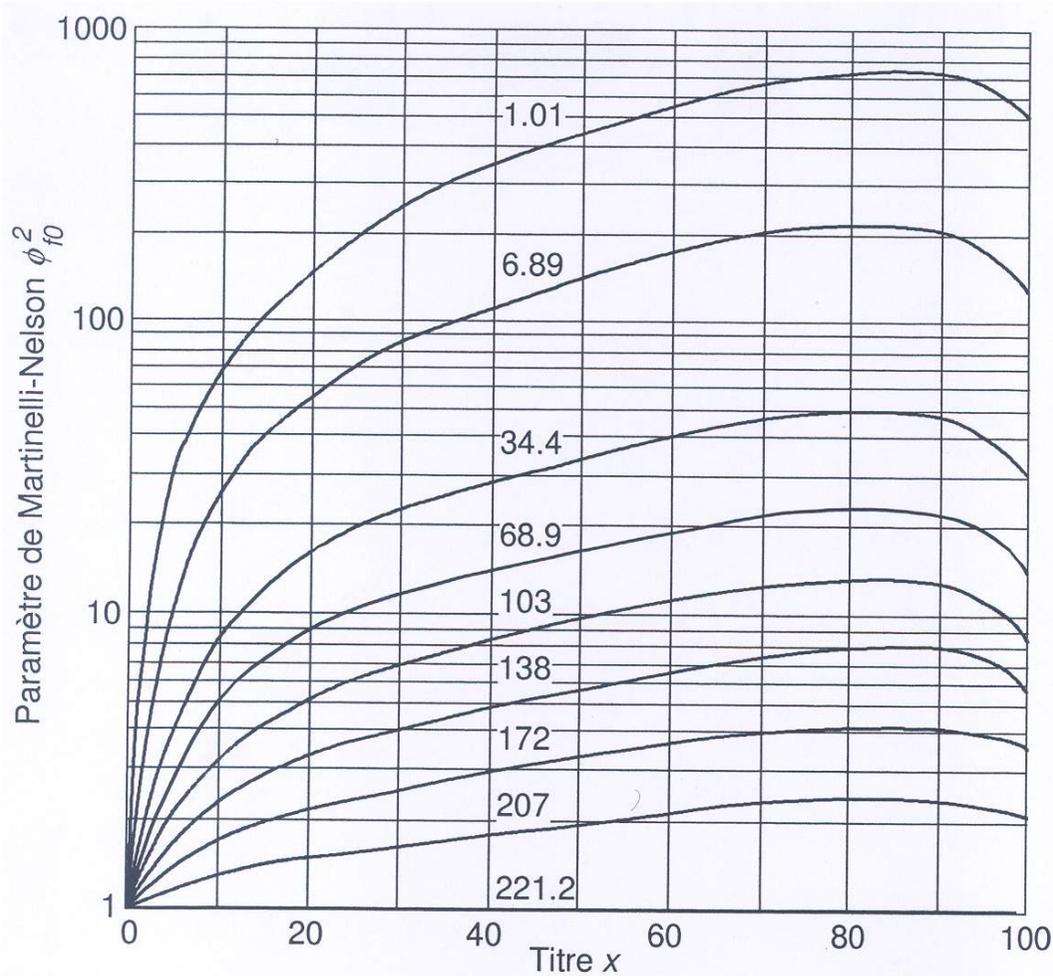
Situation	diphasique	liquide seul
Débit	$M$	$M_L = M$
$\left(\frac{dp}{dz}\right)_F$	$\left(\frac{dp}{dz}\right)$	$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{f_0}$

- Définitions de la perte de pression par frottement sans dimension,

$$\Phi_{f_0}^2 = \frac{\left(\frac{dp}{dz}\right)}{\left(\frac{dp}{dz}\right)_{f_0}}$$

- Evolution (taux de vide), données et modèles

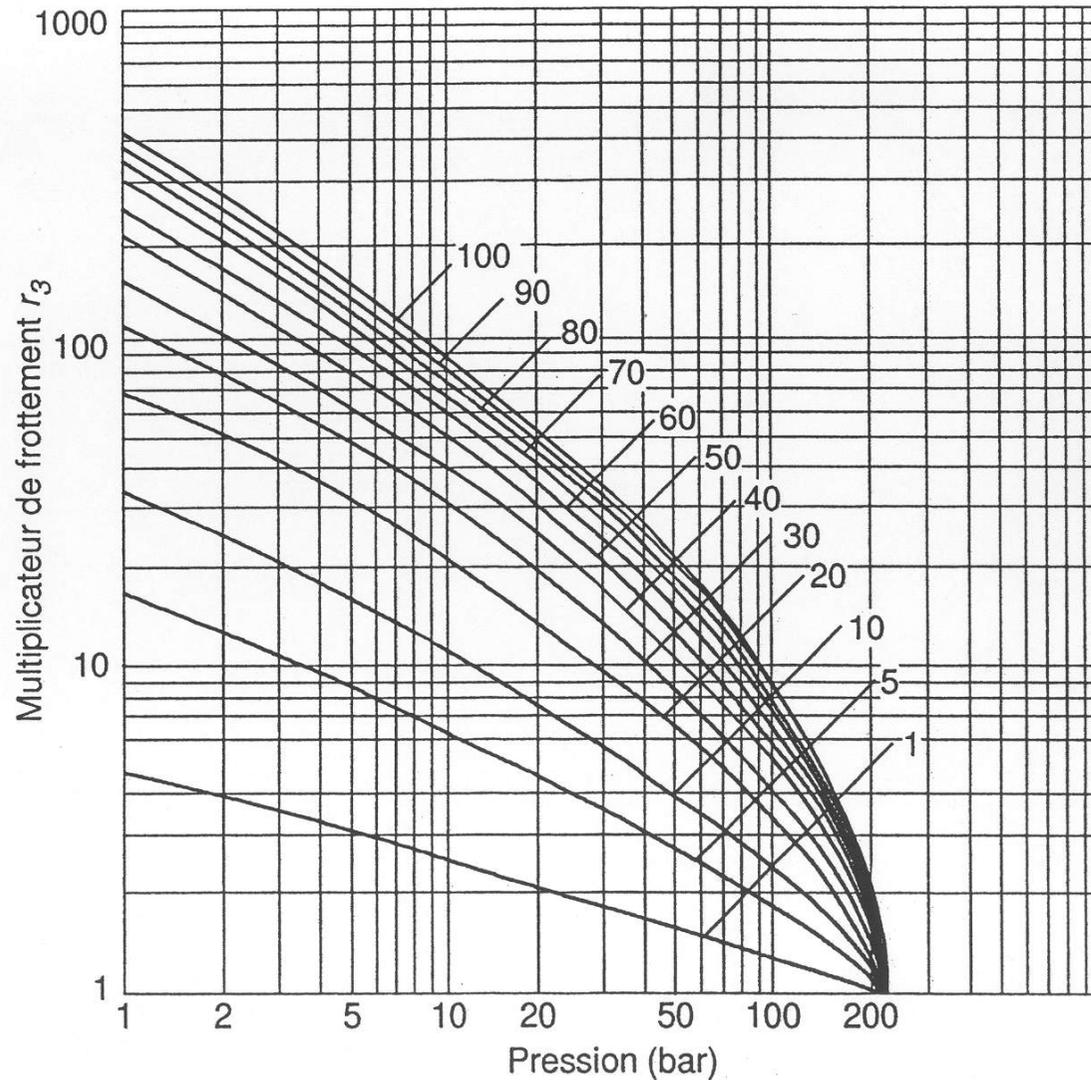
# CORRÉLATION DE MARTINELLI & NELSON



Taux de vide (accélération), paramétré en pression (bar).

$$\Phi_{f0}^2 = \frac{\left(\frac{dp}{dz}\right)}{\left(\frac{dp}{dz}\right)_{f0}}$$

# ÉCOULEMENTS BOUILLANTS



- Écoulements évolutifs (chauffage), Thom.

$$r_3 = \frac{\Delta p_F}{\Delta p_{F0}} = \frac{1}{x_S} \int_0^{x_S} \Phi_{L0}^2 dx$$

- Autres méthodes et pour en savoir plus [Delhaye \(2008b\)](#).

Paramétré en titre de sortie.

# CORRELATION DE FRIEDEL

- Réduction de qqs milliers de données, fluides variés, sans dimension. Conduite horizontale ou verticale. Même formulation que le modèle de Martinelli & Nelson. On se donne  $M$  et  $x$  :

$$\Phi_{Lo}^2 = \frac{\left(\frac{dp}{dz}\right)_F}{\left(\frac{dp}{dz}\right)_{Lo}} = E + \frac{3,24FH}{Fr^{0,045}We^{0,035}}$$

$$\rho_h = \left(\frac{x}{\rho_G} + \frac{1-x}{\rho_L}\right)^{-1}, \quad We = \frac{G^2 D}{\sigma \rho_h}, \quad Fr = \frac{G^2}{gD\rho_h^2}$$

$$H = \left(\frac{\rho_L}{\rho_G}\right)^{0,91} \left(\frac{\mu_G}{\mu_L}\right)^{0,19} \left(1 - \frac{\mu_G}{\mu_L}\right)^{0,7}, \quad F = x^{0,78}(1-x)^{0,224}$$

$$C_{FGo} = C_{FG}(M), \quad C_{FLo} = C_{FL}(M), \quad E = (1-x)^2 + x^2 \frac{\rho_L C_{FGo}}{\rho_G C_{FLo}}$$

# REFERENCES

- Delhaye, J.-M. 2008a. *Thermohydraulique des réacteurs nucléaires*. Collection génie atomique. EDP Sciences. Chap. 7-Modélisation des écoulements diphasiques en conduite, pages 231–274.
- Delhaye, J.-M. 2008b. *Thermohydraulique des réacteurs nucléaires*. Collection génie atomique. EDP Sciences. Chap. 8-Pertes de pression dans les conduites, pages 275–317.
- Ishii, M., & Hibiki, T. 2006. *Thermo-fluid dynamics of two-phase flows*. Springer.
- Van Dyke, M. 1975. *Perturbation methods in fluid mechanics*. Parabolic Press.