Analyse d'une expérience de détente de gaz parfait
Proposition de correction

15th January 2010
Hervé Lemonnier, DTN/SE2T, CEA/Grenoble, 38054 Grenoble cedex 9, France
Phone: +33 (0)4 38 78 45 40, Fax: +33 (0)4 38 78 50 45, E-Mail: *herve.lemonnier@cea.fr*

1 Analyse d'une expérience d'écoulement monophasique

1.1 Présentation du problème

L'objectif du problème que l'on peut également transformer et élaborer pour des travaux dirigés est de mettre les étudiants en situation. L'intérêt d'un modèle ne peut être évalué *a priori* mais seulement par sa capacité à rendre compte des observations.

1.2 Thermodynamique simplifiée

On utilise ici les relations générales de thermodynamique,

$$\mathrm{d}h = C_p \mathrm{d}T + \left(v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right) \mathrm{d}p \tag{1}$$

$$\mathrm{d}s = \frac{C_p}{T} \mathrm{d}T - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \mathrm{d}p \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Si on considère que sur une plage de température étroite, C_p, est constant et que l'équation d'état est celle d'un gaz parfait,

$$v = \frac{RT}{p} \tag{4}$$

Les équations thermodynamiques proposées sont exactes.

1.3 Données du problème

Le tableau 1 donne la position des prises de pression considérées dans l'exercice, le diamètre de la conduite au droit des prises et les valeurs de la pression mesurée. Le débit masse, M, traversant le dispositif et la température, T_1, mesurée à l'entrée sont les suivants,

$$M = 363,938 \text{ kg/h}, \quad T_1 = 22,1^{\circ}C. \tag{5}$$

On donne également l'évolution des valeurs de la viscosité dynamique avec la température au tableau 2.

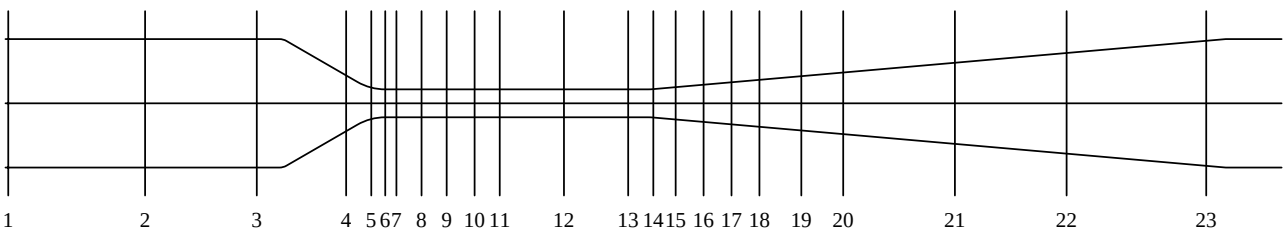

Figure 1: Description de la tuyere au col long de l'expérience Fossegrim.

Repère	1	6	11	13
z (mm)	0	136	177	223
D (mm)	46	10	10	10
p (bar)	5.9672	4.1647	3.8018	3.2683

Table 1: Evolution de la pression le long de la section d'essais, pour les conditions (5). z est la position des prises de pression et D est le diamètre de la conduite au droit des prises.

T (K)	250	260	270	280	290
μ (μ Pa s)	16,07	16,58	17,08	17,57	18,06

Table 2: Evolution de la viscosité dynamique de l'air avec la température

1.4 Equations de bilan pour la mise en vitesse de l'écoulement, sections 1-6

Dans le convergent de la tuyère, l'écoulement est adiabatique et on supposera que l'on peut négliger le frottement pariétal et les forces de volume. Le bilan de masse devient alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} A\rho w = 0, \quad M = A\rho w \tag{6}$$

Le bilan d'énergie se simplifie en,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} A\rho w \left(h + \frac{1}{2} w^2 \right) = 0, \quad h + \frac{1}{2} w^2 = h_1^t \tag{7}$$

où l'on a utilisé le bilan de masse. Le bilan d'entropie devient,

$$\rho w T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} = 0, \quad s = s_1 \tag{8}$$

où M est le débit masse, h_1^t est l'enthalpie totale à l'entrée et s_1 est l'entropie à l'entrée sont des constantes.

1.5 Analyse de la mise en vitesse de l'écoulement, sections 1-6

Pour calculer l'écoulement dans le convergent, les trois équations de bilan sont nécessaires. Si on n'en considère que deux et en introduisant une information expérimentale, on peut vérifier si le dernier bilan est vérifié. Ce test de cohérence permet d'évaluer le bien-fondé du modèle et de ces hypothèses.

1.5.1 Vérification du bilan de masse

Tout d'abord on détermine entièrement l'état dans la section 1

$$p_1 = 5,9672 \text{ bar}, \quad T_1 = 22,1^\circ\text{C} \tag{9}$$

On détermine successivement,

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = 7,04106 \text{ kg/m}^3,$$
$$M = 0,10109 \text{ kg/s}, \quad A_1 = 1,6619\,10^{-3} \text{ m}^2,$$
$$A_6 = 7,8540\,10^{-5} \text{ m}^2, \quad w_1 = \frac{M}{A_1\rho_1} = 8,6394 \text{ m/s}$$
$$h_1^t = 37,319 \text{ J/kg}$$

On considère le bilan d'entropie entre les sections 1 et 6, et la connaissance de la pression aval,

$$s_1 = s_6 = 0, \quad p_6 = 4,1647 \text{ bar}$$
$$R \ln \frac{p_6}{p_1} = C_P \ln \frac{T_6}{T_1} \Rightarrow \frac{T_6}{T_1} = 0,90248, \quad T_6 = -6,69^\circ\text{C} \tag{10}$$

L'état du fluide à la section 6 est entièrement déterminé. On détermine sa vitesse par le bilan d'énergie totale,

$$h_6 = C_p(T_6 - T_1) = -28,967 \text{ kJ/kg}$$
$$w_6 = \sqrt{2(h_1^t - h_6)} = 240,85 \text{ m/s}$$

On peut alors calculer le débit masse dans la section 6 et vérifier le bilan de masse,

$$\rho_6 = \frac{p_6}{RT_6} = 5,4452 \text{ kg/m}^3, \quad G_6 = \rho_6 w_6 = 1311,5 \text{ kg/m}^2/\text{s}$$
$$M_6 = A_6 G_6 = 0,10300 \text{ kg/s}, \quad \frac{\Delta M}{M} = \frac{M_6 - M}{M} = 1,9\%$$

Eu égard aux différentes incertitudes de mesures sur le débit, les pressions et les températures, on peut considérer que le bilan de masse est vérifié. Toutefois, si l'écart était significatif, on observe que le modèle isentropique sur-estime le débit, ce qui est cohérent avec le fait de négliger le frottement dans le convergent.

1.5.2 Vérification du bilan d'énergie

On considère maintenant les bilans de masse et d'entropie.

$$w_6 = \frac{M}{A_6 \rho_6} = 236,38 \text{ m/s}, \quad h_6^t = h_6 + \frac{1}{2} w_6^2 = -1028 \text{ J/kg} \tag{11}$$

Pour mesurer l'écart au bilan d'énergie, on détermine la différence d'enthalpie totale entre les sections 1 et 6. On mesure l'écart soit avec h_6 ou l'énergie mécanique $w_6^2/2$. Par le choix des constantes d'intégration de l'équation d'état ces deux quantités sont de même ordre.

$$\Delta h^t = h_6^t - h_1^t = 1065 \text{ J/kg}, \quad \frac{\Delta h^t}{\frac{1}{2} w_6^2} = -3,8\% \tag{12}$$

L'incertitude est plus forte. Toutefois, si on considère que le débit ou la vitesse sont incertains, le fait de considérer ici l'énergie fait intervenir les carrés des vitesses et double l'incertitude relative mécaniquement. A nouveau, si l'écart est significatif, il correspondrait à une perte d'enthalpie totale, ce qui est cohérent avec le fait que le modèle isentropique ignore la dissipation visqueuse.

Toutefois, il est difficile de dire ici si l'on peut attribuer entièrement ces erreurs à la non prise en compte du frottement dans le convergent. Il peut y avoir également un léger décollement dans le col qui rendrait aussi l'analyse 1D incertaine. On va donc considérer que les bilans sont globalement vérifiés aux incertitudes de mesure près.

1.6 Analyse cohérente de l'écoulement dans le convergent

Comme les bilans ne sont pas parfaitement bouclés, on reprend l'analyse dans le convergent en choisissant les équations qui ne font pas intervenir l'hypothèse de frottement négligeable soit le bilan de masse et le bilan d'énergie. Ces équations sont exactes si l'écoulement reste 1D.

Le bilan de masse et la relation d'état donnent,

$$M = A_6 G, \quad G = 1287,17 \text{ m/s}, \quad \rho_6 = \frac{p_6}{RT_6}. \tag{13}$$

Le bilan d'énergie donne à son tour,

$$h_1^t = h_6 + \frac{1}{2} w_6^2 = C_p(T_6 - T_1) + \frac{G^2 R^2 T_6^2}{2 p_6^2} \tag{14}$$

La température est solution d'une équation du second degré, ne possédant qu'une seule racine positive (en température absolue...),

$$\frac{G^2R^2T_6^2}{2p_6^2} + C_pT_6 - (C_pT_1 + h_1^t) = 0 \tag{15}$$

dont la solution est,

$$T_6 = -5,81^{\circ}\text{C} \tag{16}$$

On obtient ensuite l'état à la section 6 par,

$$\rho_6 = \frac{p_6}{RT_6} = 5,42738 \text{ kg/m}^3, \quad w_6 = \frac{G}{\rho_6} = 237,16 \text{ m/s} \tag{17}$$

Naturellement on a $h_6^t = h_1^t$. On notera que la température dans la section 6 est plus élevée que lorsque l'on considère l'écoulement isentropique, ce qui est encore une autre mesure de l'erreur introduite par l'hypothèse de frottement négligeable. Le bilan d'entropie permettrait alors de déterminer la source d'entropie liée au frottement dans le col.

1.7 Analyse de l'écoulement dans le col, sections 6-11-13

Lorsque l'on considère une conduite à section constante, A, et un écoulement permanent adiabatique, les bilans de masse de quantité de mouvement et d'énergie, peuvent se mettre sous la forme,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A\rho w = 0, \quad \rho w = G = \frac{M}{A_6} \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A\rho w^2 + A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -P\tau_w, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{G^2}{\rho}\right) + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{4}{D}\tau_w \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A\rho w\left(h + \frac{1}{2}w^2\right) = 0, \quad h_1^t = h + \frac{1}{2}w^2 \tag{20}$$

Ces équations possèdent un terme qu'il faut modéliser. En considérant les trois bilans et une information expérimentale, on va le déterminer.

Le calcul est identique à celui de la section précédente. On obtient la température dans les sections 11 et 13 en résolvant l'équation déduite du bilan de masse et d'énergie,

$$\frac{G^2R^2T_{11}^2}{2p_{11}^2} + C_pT_{11} - (C_pT_1 + h_1^t) = 0 \tag{21}$$

On détermine ensuite la masse volumique par l'équation des gaz parfaits et la vitesse par le bilan de masse, .

$$\rho_{11} = \frac{p_{11}}{RT_{11}}, \quad w_{11} = \frac{G}{\rho_{11}} \tag{22}$$

On procède identiquement pour la section 13. Les résultats numériques sont récapitulés au tableau 3.

On intègre ensuite le bilan de quantité de mouvement entre les sections 6 et 11,

$$p_6 - p_{11} = \underbrace{G^2\left(\frac{1}{\rho_{11}} - \frac{1}{\rho_6}\right)}_{\text{accélération}} + \underbrace{\frac{4L}{D}\tau_w}_{\text{frottement}} \tag{23}$$

où τ_w est la contrainte visqueuse moyenne entre les sections 6 et 11 distantes de L. On détermine la perte de pression par accélération à l'aide des résultats du calcul précédent, voir tableau 3. L'énoncé

Section	p bar	T °C	T K	ρ kg/m^3	w m/s	s J/kg/K
1	5,9672	22,1	295,25	7,04106	0,64	0
6	4,1647	-5,81	267,34	5,42738	237,16	3,302
11	3,8018	-10,30	262,85	5,03885	255,45	12,480
13	3,2683	-18,92	254,23	4,47864	287,40	22,334

Table 3: Résultats numériques de l'analyse dans le col de la tuyère.

Sections	Δp (bar)	Δp_A (bar)	Δp_F (bar)	L (mm)	ρ (kg/m^3)	w (m/s)	f	T (K)	μ	Re (μPa s)	f Blasius
6-11	0,36290	0,23538	0,12752	41	5,23311	246,31	$4,90\,10^{-3}$	265,09	16,83	$7,65\,10^5$	$3,06\,10^{-3}$
11-13	0,53350	0,41128	0,12222	46	4,75874	271,43	$3,79\,10^{-3}$	258,04	16,51	$7,80\,10^5$	$3,05\,10^{-3}$

Table 4: Valeurs numériques des différentes composantes de la perte de pression et du coefficient de frottement expérimental.

suggère de déterminer le frottement en considérant la valeurs moyennes de la masse volumique et de la vitesse sur le tronçon de conduite considéré. On pose,

$$\Delta p = p_6 - p_{11}, \quad \Delta p_A = G^2\left(\frac{1}{\rho_{11}} - \frac{1}{\rho_6}\right), \quad \Delta p_F = \Delta p - \Delta p_A. \tag{24}$$

On détermine le coefficient de frottement expérimental par,

$$f = \frac{\Delta p_F}{\rho w^2}\frac{D}{2L}, \quad \rho \approx \frac{1}{2}(\rho_6 + \rho_{11}), \quad w \approx \frac{1}{2}(w_6 + w_{11}) \tag{25}$$

On procède identiquement entre les sections 11 et 13. Les résultats numériques sont donnés au tableau 4

La corrélation de Blasius nécessite de déterminer le nombre de Reynolds, donc la viscosité. Elle est obtenue par interpolation linéaire dans les valeurs du tableau 2. On utilise la température moyenne dans chaque tronçon, le nombre de Reynolds et le frottement de Blasius sont donnés par,

$$\mathrm{Re} = \frac{GD}{\mu}, \quad f = 0,046\,\mathrm{Re}^{-0.2}. \tag{26}$$

Les résultats de ce calcul sont également donnés au tableau 4. On observe que le modèle de Blasius sous-estime le frottement calculé dans l'expérience.

1.8 Analyse par le bilan d'entropie

Considérons maintenant le bilan d'entropie au lieu du bilan de quantité de mouvement. L'avantage évident de cette équation,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} = \frac{4}{D}\frac{\tau_w}{\rho T}, \tag{27}$$

est de s'intégrer directement même si la section de la conduite varie, ce qui n'est pas le cas du bilan de quantité de mouvement.

Le tableau 3 donne les valeurs numériques de l'entropie. La longueur de frottement équivalente du convergent est donnée par,

$$L = s_6\frac{D}{2L}\frac{T_6}{w_6^2} = 1,96D \tag{28}$$

On obtient ensuite le coefficient de frottement par,

$$f = \Delta s \frac{D}{2L} \frac{T}{w^2} \tag{29}$$

où T et w sont déjà donnés au tableau 4. On obtient,

$$f_{6-11} = 4,98\,10^{-3}, \quad f_{11-13} = 3,76\,10^{-3}, \tag{30}$$

c'est-à-dire essentiellement les mêmes valeurs que l'analyse par le bilan de quantité de mouvement.

1.9 Conclusions

On observe que le frottement de Blasius surestime les données. La correlation de Blasius correspond au régime turbulent lisse et les évaluations du tableau 4 correspondent effectivement aux valeurs que l'on peut lire sur le graphe de la figure 2. Trois observations,

- Le frottement semble décroître nettement dans le col. Cela va dans le sens de l'établissement de l'écoulement. Le frottement observé est sous-estimé par la corrélation de Blasius car il n'est pas établi.
- S'il y a avait un léger décollement à l'entrée, le modèle 1D ne peut en rendre compte. Le seul terme que l'on a déduit de l'expérience étant le frottement, cette incohérence éventuelle du modèle 1D se reporte sur le frottement régulier qui se retrouve sur-estimé.
- Si le frottement était établi dans la seconde portion du col, ce qui est encore à démonter vu la faiblesse de $L/D = 5 \div 10$, on observe qu'une légère rugosité de l'ordre de 1 à 2 μm suffit pour porter le frottement au voisinage des valeurs observées.

On peut donc conclure,

- Le modèle 1D rend compte raisonnablement des observations.
- On ne commet qu'une erreur faible en négligeant le frottement dans le col.
- Le frottement établi restitue plus que l'ordre de grandeur des observations, il n'est pas trop faux (moins qu'un facteur 2).

1.10 Question bonus

La vitesse du fluide approche la vitesse du son et l'atteint d'ailleurs dans l'expérience après la sortie du col. Le phénomène de blocage de débit est présent dans l'expérience et le débit est effectivement critique. L'écoulement à l'aval du col est supersonique. Ce sera peut-être l'objet d'un futur problème.

La vitesse du son dans la section 13 est donnée par

$$a_{13} = \sqrt{\gamma R T_{13}} = 319,54 \text{ m/s}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_p - R} = 1,3999 \tag{31}$$

Le nombre de Mach vaut dans cette section $\text{Ma} = 0,9$ environ. Le col géométrique se termine 8 mm environ après la section 13. Cette dernière analyse montre à nouveau l'intérêt de l'analyse *à la main* d'expériences par des modèles 1D.

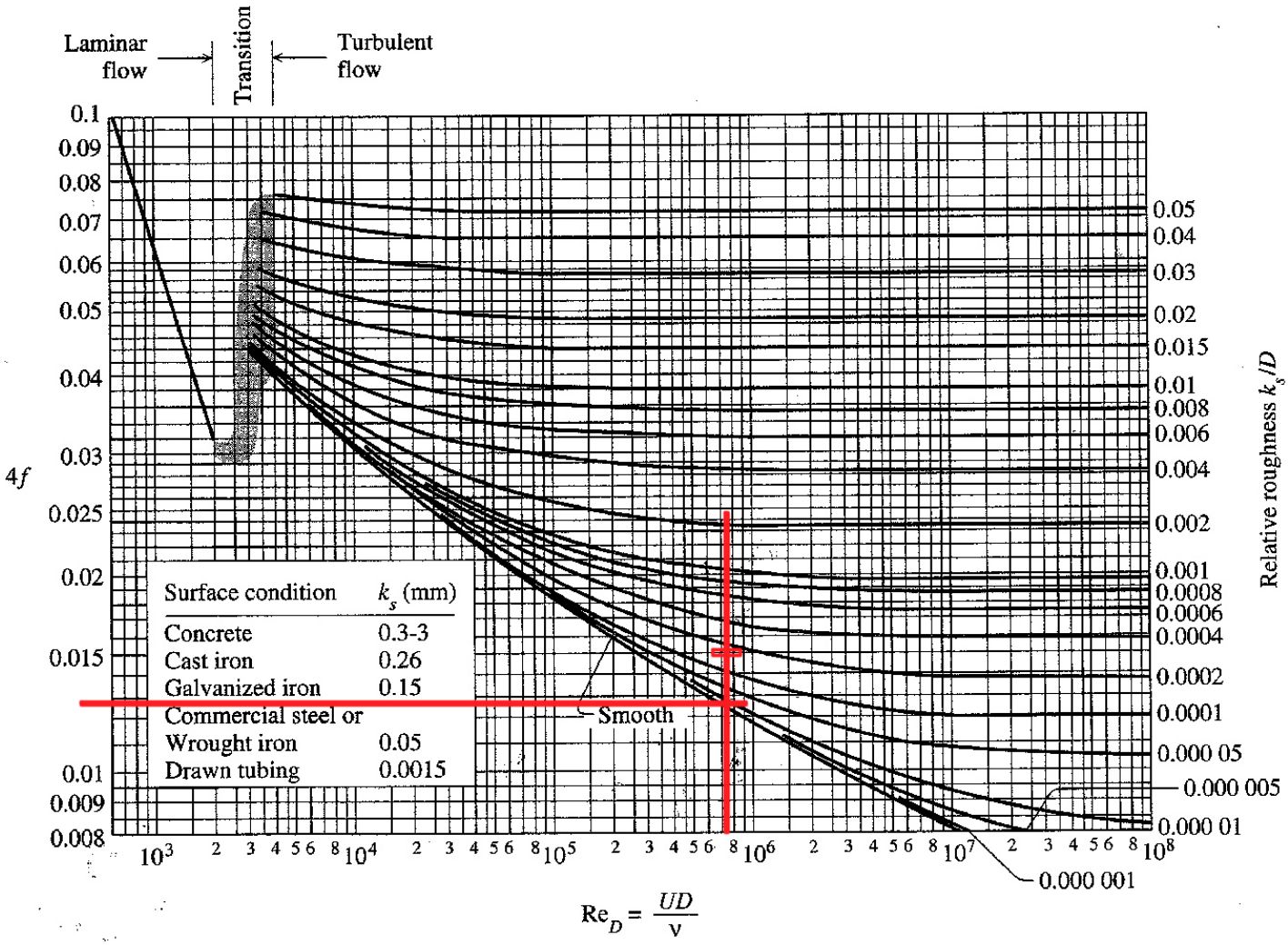

Figure 2: Evolution du coefficient de perte de pression régulier pour une conduite rectiligne. D'après **?**, p. 313