ECOULEMENT ET TRANSFERTS DE CHALEUR
Etablissement des modèles 1D
Détente d'un gaz parfait

HERVE LEMONNIER

DTN/SE2T, CEA/Grenoble, 38054 Grenoble Cedex 9
Tél. +33 (0)4 38 78 45 40, *herve.lemonnier@cea.fr*

MEC566, 2009-2010

ANALYSE DE LA DÉTENTE D'UN GAZ PARFAIT

- L'objectif premier d'un modèle est de rendre compte des observations. On peut ensuite tenter de l'utiliser de façon prédictive.
- Si l'objectif n'est pas atteint,
  - on sait justifier le recours à un modèle plus sophistiqué,
  - on peut mesurer l'amélioration apportée par la sophistication.
- Problématique de la modélisation : validité d'un modèle et de ses fermetures.
- Etablissement des équations du modèle 1D.
- Application à l'analyse de l'écoulement dans une tuyère convergente.

LES MODÈLES 1D

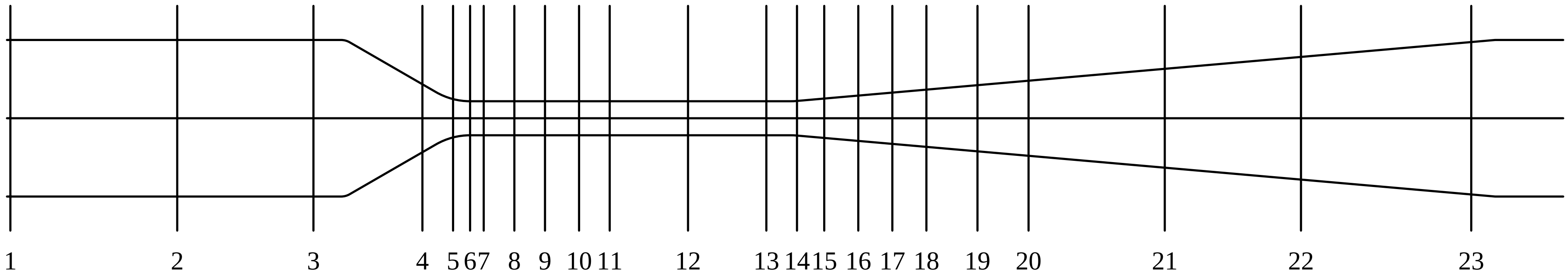
- Les modèles 1D ne sont pas la restriction 1D des équations de bilan locales.
- Les modèles 1D sont des modèles d'évolution des grandeurs moyennes dans la section, accompagnés de certaines hypothèses raisonnables.
- L'opération de moyenne fait apparaître des termes inconnus : frottement et flux de chaleur pariétaux.
- Le modèle 1D n'est pas fermé. Questions ?
  - Le modèle 1D est-il adapté à la situation ?
  - L'effet du frottement est-il légitimement négligeable dans le convergent ?
  - Dans le col, la modélisation du frottement retenue est-elle acceptable ?

ETABLISSEMENT DES ÉQUATIONS DU MODÈLE 1D

Domaine de validité : écoulements filaires,

- L'écoulement est proche de l'établissement, les profils sont relativement plats.
- L'état de l'écoulement peut être caractérisé des paramètres moyens dans la section : w, p, h etc.
- Les équations d'état sont satisfaites par ces états moyens.
- Les transferts sont principalement radiaux.
- La fermeture des équations est souvent basée sur des résultats expérimentaux sur des écoulements établis en conduite circulaire. Notion de diamètre hydraulique.

EXPERIENCE FOSSEGRIM



$$M = 363,938 \text{ kg/h}, \quad T_1 = 22,1°\text{C}$$

$$C_P = 1006 \text{ J/kg/K}, \quad R = 287,04 \text{ J/kg/K}$$

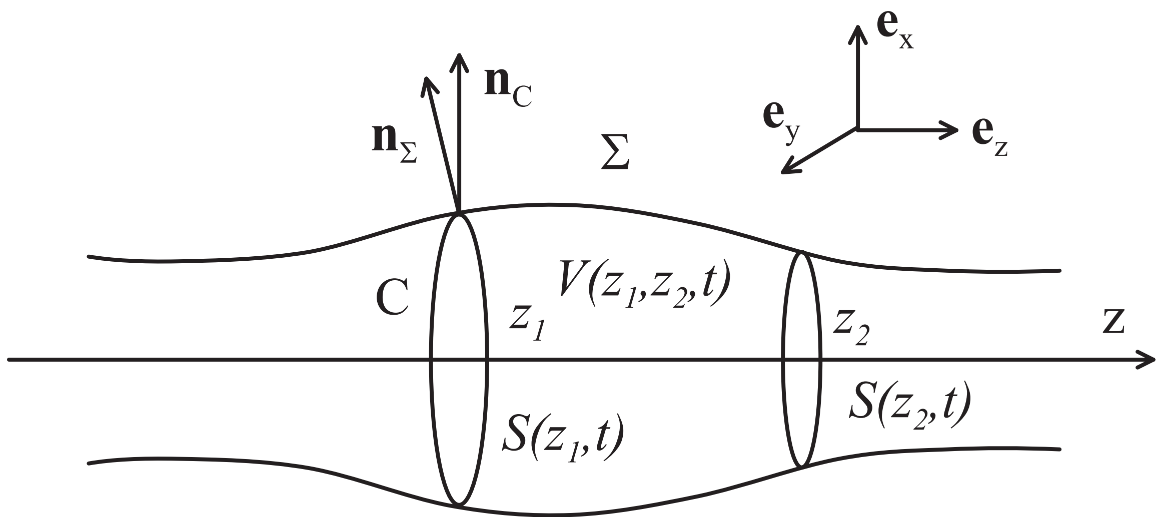
$$h = C_p(T - T_1), \quad \rho = \frac{p}{RT}$$

$$s = C_p \ln \frac{T}{T_1} - R \ln \frac{p}{p_1}$$

Repère	1	6	11	13
z (mm)	0	136	177	223
D (mm)	46	10	10	10
p (bar)	5.9672	4.1647	3.8018	3.2683

T (K)	250	260	270	280	290
μ (μPa s)	16,07	16,58	17,08	17,57	18,06

ETABLISSEMENT DU MODÈLE 1D



- Forme limite du théorème de Gauss pour une section de conduite,

$$\int_{S(z,t)} \nabla \cdot \mathbf{B} \, \mathrm{d}S = \frac{\partial}{\partial z} \int_{S(z,t)} B_z \, \mathrm{d}S + \int_{C(z,t)} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_\Sigma}{\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{n}_\Sigma} \, \mathrm{d}l$$

- Forme limite de la règle de Leibniz pour une section de conduite,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S(z,t)} f \, \mathrm{d}S = \int_{S(z,t)} \frac{\partial f}{\partial t} \, \mathrm{d}S + \int_{C(z,t)} \frac{f \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma}{\mathbf{n}_C \cdot \mathbf{n}_\Sigma} \, \mathrm{d}l$$

ETABLISSEMENT DES ÉQUATIONS DU MODÈLE 1D

- Equation locales intégrées sur la section A fixe et imperméable,

$$\int_A \frac{\partial \rho\psi}{\partial t} \mathrm{d}A = -\int_A \nabla \cdot \mathbf{j}_\psi^t \mathrm{d}A + \int_A \phi_\psi \mathrm{d}A$$

- Formes limites de la règle de Leibniz et théorème de Gauss

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_A \rho\psi \mathrm{d}A = -\frac{\partial}{\partial z}\int_A \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{j}_\psi^t \mathrm{d}A - \int_P \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\psi \frac{\mathrm{d}l}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_C} + \int_A \phi_\psi \mathrm{d}A$$

- Définition de la moyenne sur la section,

$$A \langle\!\langle f \rangle\!\rangle_2 = \int_A f \mathrm{d}A$$

- Expression exacte, $w = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z$

$$\frac{\partial}{\partial t} A \langle\!\langle \rho\psi \rangle\!\rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A \langle\!\langle \rho w \psi \rangle\!\rangle_2 = -\frac{\partial}{\partial z} A \langle\!\langle \mathbf{e}_z . \mathbf{j}_\psi \rangle\!\rangle_2 - P \langle\!\langle \mathbf{n} . \mathbf{j}_\psi \rangle\!\rangle_P + A \langle\!\langle \phi_\psi \rangle\!\rangle_2$$

BILAN DE MASSE

- Bilan de masse $\psi = 1$, $\mathbf{j} = 0$, $\phi = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} A \nless \rho \ngtr_2 + \frac{\partial}{\partial z} A \nless \rho w \ngtr_2 = 0$$

- Définition des grandeurs moyennes,

$$\nless \rho \ngtr_2 \rightarrow \rho, \quad \rho w = \nless \rho w \ngtr_2$$

- Equation toujours exacte,

$$\frac{\partial}{\partial t} A\rho + \frac{\partial}{\partial z} A\rho w = 0$$

,

- définition du débit masse et de la vitesse massique,

$$M = AG \triangleq A \nless \rho w \ngtr_2 = A\rho w$$

BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

- $\psi = \mathbf{v}$, $\mathbf{j} = -\mathbb{T} = p\mathbb{I} - \mathbb{V}$, $\phi = \rho\mathbf{g}$
- Projection sur $\mathbf{e}_z$,

$$\frac{\partial}{\partial t} A \langle\!\langle \rho w \rangle\!\rangle_2 + \frac{\partial}{\partial z} A \langle\!\langle \rho w^2 \rangle\!\rangle_2 = \frac{\partial}{\partial z} A \langle\!\langle \mathbf{e}_z . \mathbb{T} . \mathbf{e}_z \rangle\!\rangle_2 - P \langle\!\langle \mathbf{n} . \mathbb{T} . \mathbf{e}_z \rangle\!\rangle_P + A \langle\!\langle \rho g_z \rangle\!\rangle_2$$

- Théorème de Gauss, $\mathbb{B} = p\mathbb{I}$, projeté sur Oz, définit la pression moyenne,

$$\int_{S(z,t)} \frac{\partial p}{\partial z} \, \mathrm{d}S = \frac{\partial}{\partial z} \int_{S(z,t)} p \, \mathrm{d}S + \int_{C(z,t)} p \frac{\mathbf{n} \, . \, \mathbf{e}_z}{\mathbf{n}_C \, . \, \mathbf{n}} \, \mathrm{d}l \to A \frac{\partial p}{\partial z}$$

- On néglige l'action des contraintes visqueuses sur A, τ_W, contrainte de cisaillement moyenne sur le périmètre (inconnue),

$$\frac{\partial}{\partial t} A\rho w + \frac{\partial}{\partial z} A\rho w^2 = -A \frac{\partial p}{\partial z} - P\tau_W + A\rho g_z + \frac{\partial}{\partial z} A \langle\!\langle \mathbf{e}_z \, . \, \mathbb{V} \, . \, \mathbf{e}_z \rangle\!\rangle_2$$

BILAN D'ÉNERGIE TOTALE

- $\psi = u^t \triangleq u + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2$, $\mathbf{j} = \mathbf{q} - \mathbb{T} \centerdot \mathbf{v}$, $\phi = \rho\mathbf{g} \centerdot \mathbf{v} \cdots$
- Equation locale,

$$\frac{\partial \rho u^t}{\partial t} + \nabla \centerdot \left(\rho \mathbf{v} u^t + \mathbf{q} - \mathbb{T} \centerdot \mathbf{v}\right) = \rho \mathbf{g} \centerdot \mathbf{v}$$

- En enthalpie, $h \triangleq u + p/\rho$,

$$\frac{\partial \rho h^t}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \centerdot \left(\rho \mathbf{v} h^t + \mathbf{q} - \mathbb{V} \centerdot \mathbf{v}\right) = \rho \mathbf{g} \centerdot \mathbf{v}$$

- Intégrer sur la section, négliger les flux axiaux, la puissance des contraintes visqueuses sur la section. RMQ : les contraintes ne travaillent pas sur la paroi. Définition de l'enthalpie moyenne,

$$\nprec \rho w (h + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2) \nsucc_2 \rightarrow A\rho w (h + \frac{1}{2} w^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A\rho h^t - A\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} A\rho w h^t = -P \nprec \mathbf{q} \centerdot \mathbf{n} \nsucc_P + \rho g w = {\color{red} P q_W} + \rho g w.$$

FORME CONVECTIVE

- Combinaison avec le bilan de masse,

$$\frac{\partial}{\partial t}A\rho + \frac{\partial}{\partial z}A\rho w = 0$$

- Bilan de quantité de mouvement selon Oz

$$A\rho\frac{\partial w}{\partial t} + A\rho w\frac{\partial w}{\partial z} = -A\frac{\partial p}{\partial z} - P\tau_W + \rho g_z$$

- Bilan d'énergie totale,

$$A\rho\frac{\partial h^t}{\partial t} - A\frac{\partial p}{\partial t} + A\rho w\frac{\partial h^t}{\partial z} = Pq_W + \rho g_z w$$

EQUATIONS SECONDAIRES

- Deux méthodes équivalentes au sens des hypothèses du modèle 1D : moyenne des équations locales ou combinaison des équations du modèle 1D
- Bilan d'énergie mécanique, $w \times$ bilan de qdm Oz

$$A\rho\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}w^2 + A\rho w\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}w^2 = -Aw\frac{\partial p}{\partial z} - Pw\tau_W + \rho g_z w$$

- Bilan d'énergie interne,

$$A\rho\frac{\partial h}{\partial t} - A\frac{\partial p}{\partial t} + A\rho w\frac{\partial h}{\partial z} = Pq_W + Pw\tau_W + Aw\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z w$$

- Hypothèse d'équilibre thermodynamique en moyenne, $\mathrm{d}h = T\mathrm{d}s - \mathrm{d}p/\rho$, $h(T,p)$ définit T,

$$A\rho\frac{\partial s}{\partial t} + A\rho w\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{Pq_W + Pw\tau_W}{T}$$

- Le bilan d'entropie est fermé

INTERPRÉTATION DU BILAN D'ENTROPIE (1/2)

- Equation locale, fluide pur, équilibre local

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} s = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} + \frac{\mathbb{V} : \nabla \mathbf{v}}{T}$$

- Moyenne sur la section, quantités moyennes, forme convective, pas fermé,

$$A\rho \frac{\partial s}{\partial t} + A\rho w \frac{\partial s}{\partial z} = -P \langle\!\langle \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} \rangle\!\rangle_P + A \langle\!\langle \sigma_T \rangle\!\rangle_2 + A \langle\!\langle \sigma_V \rangle\!\rangle_2$$

- Rappel bilan d'entropie moyen,

$$A\rho \frac{\partial s}{\partial t} + A\rho w \frac{\partial s}{\partial z} = P \frac{q_W}{T_W} + P q_W \left(\frac{T_W - T}{T T_W}\right) + P \frac{w \tau_W}{T}$$

  – Source d'entropie extérieure réversible liée à l'apport de chaleur,

  – Source d'entropie interne liée à la conduction

  – Source d'entropie liée à la dissipation visqueuse

- Un écoulement 1D, adiabatique et sans frottement est isentropique.

INTERPRÉTATION DU BILAN D'ENTROPIE (2/2)

- Positivité des sources d'entropie,

$$q_W(T_W - T) \geqslant 0, \quad w\tau_W \geqslant 0$$

- h, coefficient de transfert de chaleur (W/m^2/K)

$$q_W = h(T_W - T), \quad h \geqslant 0$$

- Le frottement est opposé au mouvement, C_f, coefficient de frottement,

$$\tau_W = \frac{1}{2}\rho w^2 C_f \mathrm{sign}(w)$$

ECOULEMENT PERMANENT

- Equations primaires

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} A\rho w =& 0, \quad M = A\rho w = \text{cste} \\
A\rho w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} =& - P\tau_W + A\rho g_z \\
A\rho w \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(h + \frac{1}{2}w^2\right) =& P q_W + A\rho w g_z
\end{aligned}
$$

- Equations secondaires

$$
A\rho w \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} = P\frac{q_W}{T} + P\frac{w\tau_W}{T}
$$

- Diamètre hydraulique, $\dfrac{P}{A} = \dfrac{4}{D_h}$
- Pour un réseau curviligne, h et s sont les bonnes variables, plutôt que T et p.